論文審査の結果要旨

氏名 澤野嘉宏

本論文は d 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^d$ 上の doubling 条件をみたすとは限らない測度に基づいた Morrey 空間に関する結果，ならびに関連した作用素，関数空間に関するものである．Morrey 空間はもともと偏微分方程式との関連から，d 次元ユークリッド空間上の d 次元ルベーグ測度に基づいて定義された関数空間である．この空間についてはすでに多くの先行研究があり，この関数空間の構造，Hardy-Littlewood 極大関数，特異積分をはじめとする調和解析で重要な役割を果たす作用素に関する研究がされてきた．そのうちの少なからぬものはある種の doubling 条件をみたす等質型空間に一般化されている．d 次元ユークリッド空間上の d 次元ルベーグ測度はいわゆる doubling 条件をみたす測度の典型的な例である．これに対して，本論文の申請者は d 次元ユークリッド空間上の必ずしも doubling 条件をみたすとは限らない Radon 測度，non-doubling measure に基づいた関数空間の研究を行った．Doubling 条件をみたさない測度としてはたとえば近年増大条件をみたす Radon 測度などが複素解析やフラクタルに関する数学で注目されている．申請者はこういった non-doubling measure μ について，Morrey 空間を中心に，いくつかの関数空間そして調和解析に動機をもつ作用素に関する新しい知見を数多く得た．

澤野氏はまず古典的な定義を若干変更して，Morrey 空間 $M^p_q(k,\mu)$ を次のように定義した．

$$\mathcal{M}^p_q(k,\mu) = \left\{ f \in L^q_{loc}(\mu) : \left\| f : \mathcal{M}^p_q(k,\mu) \right\| < \infty \right\},$$

ただしここで，$k > 1$, $1 \leq q \leq p < \infty$ であり，$\mathcal{Q}(\mu)$ は各辺が座標軸に並行であるような d 次元立方体で μ 測度が正のもの全体のなす集合であり，

$$\left\| f : \mathcal{M}^p_q(k,\mu) \right\| = \sup_{Q \in \mathcal{Q}(\mu)} \mu(kQ)^{1/p-1/q} \left(\int_Q |f(y)|^q \, d\mu(y) \right)^{1/q}$$

である．澤野氏はこの空間に関する基本的ないくつかの性質を証明した．その一つの帰結として，Morrey 空間の定義は $k > 1$ であれば k の取り方によらないこと，すなわち Morrey 空間を定義するノルム $\left\| \cdot : \mathcal{M}^p_q(k,\mu) \right\|$ は k が異なっても同値であることが示された．そのため以下 k に関する記述は省略することもある．そして彼は，変更された Hardy-Littlewood 極大関数

$$M_\kappa f(x) = \sup_{x \in Q \in \mathcal{Q}(\mu)} \frac{1}{\mu(\kappa Q)} \int_Q |f(y)| \, d\mu(y)$$

の空間 $M^p_q(k,\mu)$ における有界性に関する次の結果を証明した：$k, \kappa > 1$ と $1 < q \leq p < \infty$ に対してある定数 $C > 0$ が存在し，

$$\left\| M_\kappa f : \mathcal{M}^p_q(k,\mu) \right\| \leq C \left\| f : \mathcal{M}^p_q(k,\mu) \right\|$$

をみたす．そしてこれをさらにベクトル値の場合に一般化した．それを記述するためいくつか記号の説明を記す．$f=(f_1,f_2,\cdots)$ をベクトル値の関数とする．これについて $0<r<\infty$ に対して

$$\|f_j : l^r\|(x)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j(x)|^r\right)^{1/r}$$

とする．$r=\infty$ の場合は上限についての通常のノルムを考える．そしてベクトル値関数 f に対して

$$\left\|f_j:\mathcal{M}_q^p(l^r,\mu)\right\|=\left\|\|f_j:l^r\|:\mathcal{M}_q^p(\mu)\right\|$$

と定義する．澤野氏が得た定理は次のものである：$k,\kappa>1$, $1<q\leq p<\infty$, $1<r\leq\infty$ に対してある正定数 C が存在し

$$\left\|M_\kappa f_j:\mathcal{M}_q^p(l^r,\mu)\right\|\leq C\left\|f_j:\mathcal{M}_q^p(l^r,\mu)\right\|$$

が成り立つ．また澤野氏は分数極大関数に関する弱型有界性も証明している．

調和解析で極めて重要な作用素として特異積分作用素がある．特異積分の研究の歴史は古く，Hilbert 変換の L^p 有界性 $(1<p<\infty)$ に関する Calderón と Zygmund の仕事にまでさかのぼる．この研究は多くの研究者により発展してきたが，Nazarov, Treil, Volberg (1998) はいわゆる Calderón-Zygmund 特異積分作用素を増大条件のある測度付きの可分距離空間上で研究し，その L^p 有界性に関する研究を行った $(1<p<\infty)$．澤野氏は d 次元ユークリッド空間の場合にこの特異積分作用素が Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^p(k,\mu)$ でも有界になることを証明した $(1<q\leq p<\infty)$．また彼は分数積分作用素についての研究ならびに Morrey 空間での分数積分作用素の有界性も証明した．ただしその結果は澤野氏自身と田中仁氏による共同研究でさらに改良された．本論文にはその改良された形が記されている．そのほかさらに調和解析で有用なシャープ極大関数も適切な定義の変更のもとで，Morrey 空間で有界になることを証明している．シャープ極大関数を用いて，RBMO 関数と特異積分作用素の交換子に関する Morrey 空間での有界性も証明している．また以上に記した結果に付随した研究結果や Besov-Morrey 空間，Triebel-Lizorkin-Morrey 空間などについての研究結果も記されている．

澤野氏は Morrey 空間をはじめとする関数空間を単独あるいは他の研究者と共同で研究し，多くの成果を挙げている．それらは単著の論文，あるいは別の結果と併せて共著論文としていくつかの学術誌等にほとんどが発表ないし発表が予定されている．彼の学位申請論文は，彼単独による研究のほか，共同研究による結果も記されたものであるが，そのうち彼が証明した結果は，本論文に記されている他の共同研究によるものも含めて，この方面の基本的な結果であり，博士論文に値するものであると考えられる．よって論文提出

者　澤野嘉宏は，博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．