論文の内容の要旨

論文題目

Derived categories of coherent sheaves and Fourier-Mukai transforms

(連接層の導来圏とフーリエ向井変換)

氏名　戸田　幸伸

本論分はパートIとパートIIで構成されている。パートIでは連接層の導来圏とフーリエ向井変換の関係について扱った。導来圏の変形理論については論文 [1], [9] 等で扱われているが、これらはフーリエ向井変換との関連を明らかにはしていない。そこでパートIでは連接層の圏の1次無限小変形を具体的に構成し、それらがフーリエ向井変換で保たれることを示した。より詳しくは以下の通りである。X, Y を滑らかな複素射影代数多様体とし、$\Phi\colon D^b(X) \to D^b(Y)$ が導来圏の同値を与えているとする。この時、Φ は Hochschild コホモロジーの間の同型 $\phi\colon HH^N(X) \to HH^N(Y)$ を与えることが知られている。一方で $HH^2(X)$ は HKR-同型により、次の形に分解する。

$$HH^2(X) \cong HT^2(X) := H^2(\mathcal{O}_X) \oplus H^1(T_X) \oplus H^0(\wedge^2 T_X).$$

従って Φ は同型 $\phi_T\colon HT^2(X) \to HT^2(Y)$ を誘導する。ここで $HT^2(X)$ の直和成分のうち、$H^1(T_X)$ は倉西変形空間の接空間である。本論分では $H^0(\wedge^2 T_X)$ を非可換変形、$H^2(\mathcal{O}_X)$ を捩れ層としての変形と解釈することにより、各 $u \in HT^2(X)$ に対して $\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$-線形なアーベル圏 $\mathrm{Coh}(X, u)$ を構成する。以下がパートIの主定理である。

Theorem 0.1 $u \in HT^2(X)$ に対し、$v := \phi_T(u) \in HT^2(Y)$ とする。この時、同値 $\Phi\colon D^b(X) \to D^b(Y)$ は同値

$$\Phi^{\dagger}\colon D^b(\mathrm{Coh}(X, u)) \longrightarrow D^b(\mathrm{Coh}(Y, v))$$

に拡張する。

定理 0.1 の興味深い点の一つは、ϕ_T が $HT^2(X)$ と $HT^2(Y)$ の直和分解を必ずしも保たないことである。これにより、変形を通じて興味深い対称性が得られると期待できる。また定理 0.1 は論文 [2] により、X が

アーベル多様体、Y がその双対多様体、Φ がポアンカレ直線束で与えられている場合に、$\Phi^\dagger$ が無限次の次数まで拡張することが示された。

パート II の目的は、3次元クレパント小特異点解消から定まる三角圏の stability condition の空間を記述することである。三角圏の stability condition は 2002 年、論文 [4] において T.Bridgeland 氏によって導入され、M.R.Douglas 氏による Π-stability の数学的な枠組みを与えているとして現在注目を浴びている研究対象である。三角圏 $\mathcal{D}$ に対してその stability condition は、t-構造 $\mathcal{A}$ 及び群準同型 $Z\colon K(\mathcal{D}) \to \mathbb{C}$（セントラルチャージと呼ばれる）の組で、ある性質を満たすものとして定義される。stability condition 全体は $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ と記述されるが、$\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ には自然な位相構造が入り、$K(\mathcal{D})$ が有限生成の場合には複素多様体になる。一方 stability のデータから、各 $\phi \in \mathbb{R}$ に対して stable な対象達 $\mathcal{P}(\phi) \subset \mathcal{D}$ が定まる。$\mathcal{D}$ が3次元カラビ-ヤウ多様体の導来圏の場合、$\mathcal{P}(\phi)$ 達はある $\mathcal{N}=2$ 超共型場理論 (SCFT) に対応する BPS-ブレインであると期待され、特に自己同値群で割った空間 $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})/\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ は「弦理論的ケーラーモジュライ空間」であると考えられる。これは SCFT のモジュライ空間の部分多様体であり、$\check{X}$ が X のミラー多様体とすると、$\check{X}$ の複素構造のモジュライ空間と一致すべき空間である。

X, Y を複素数体上の3次元スキームとし、$f\colon X \to Y$ をクレパント小特異点解消とする。C を f の例外集合、$D^b(X)$ を X 上の連接層の導来圏とし $\mathcal{D}_{X/Y}$ を次のように定める。

$$\mathcal{D}_{X/Y} := \{E \in D^b(X) \mid \text{全ての } n \text{ について } \mathrm{Supp}\, H^n(E) \subset C\}.$$

$\mathcal{D}_{X/Y}$ の stability condition を記述することが本論分の目的である。$\mathcal{D}_{X/Y}$ は C に沿って完備化しても不変であるため、本論分では完備局所ネター $\mathbb{C}$-代数 R について、$Y = \mathrm{Spec}\, R$ と書けると仮定して議論している。現在までに研究されている stability condition の具体的な記述に関しては、曲線や K3 曲面の導来圏 ([4], [5])、$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)$ の全空間、2次元 Kleinian 特異点から定まるカラビ-ヤウ圏（[8], [7]）についてのみであり、本論分は更なる例を与えたことになる。

$\mathcal{D}_{X/Y}$ の stability condition については、少なくとも2種類のタイプがある。一つは代数的、もう一つは幾何的に構成できる stability condition である。代数的な stability condition については、論文 [7] において T.Bridgeland 氏が McKay 対応を用いた方法と同様の方法で構成することが出来る。一方、幾何的には次のように構成できる。まず t-構造として、$\mathrm{Coh}_C(X) := \mathcal{D}_{X/Y} \cap \mathrm{Coh}(X)$ をとる。次にセントラルチャージとしては、$\beta + i\omega \in A(X/Y)_{\mathbb{C}} \subset N^1(X/Y)_{\mathbb{C}}$ に対して

$$Z_{(\beta,\omega)}(E) := -\int e^{-(\beta+i\omega)}\,\mathrm{ch}(E)$$

と定める。ここで $N^1(X/Y)_{\mathbb{C}}$ は X 上の $\mathbb{C}$-係数因子の数値的同値類、$A(X/Y)_{\mathbb{C}}$ は複素化された豊富錘である。この様にして構成された stability condition 全体 $U_{X,\mathrm{n}}$ は部分多様体

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{n}}(\mathcal{D}_{X/Y}) := \{(Z, \mathcal{A}) \in \mathrm{Stab}(\mathcal{D}) \mid Z([\mathcal{O}_x]) = -1\}$$

の開集合を定める。$U_{X,\mathrm{n}}$ は X に対応する「極大体積極限」の近傍を表していると考えられる。一方、各双有理モデル $g\colon W \to Y$ 及びフーリエ向井変換 $\Phi\colon D^b(W) \to D^b(X)$ に対して同様の開集合 $U_{\mathrm{n}}(W, \Phi)$ が得られる。この様な組のうち、Φ が特別な形（論文 [3] で与えられた変換と直線束のテンソルの合成）で与えられるもの全体を $\mathrm{FM}^{\circ}(X)$ と書く。パート II の最初の目的は次の定理である。

Theorem 0.2 $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ を

$$\mathcal{M}_{\mathrm{n}} := \bigcup_{(W,\Phi)\in \mathrm{FM}^{\circ}(\mathrm{X})} U_{\mathrm{n}}(W, \Phi) \subset \mathrm{Stab}_{\mathrm{n}}(\mathcal{D}_{X/Y})$$

と定める。この時 $U_{\mathrm{n}}(W, \Phi)$ 達は $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ の領域分解を与え、$\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ の閉包は $\mathrm{Stab}_{\mathrm{n}}(\mathcal{D}_{X/Y})$ の一つの連結成分になる。

上の定理は $\mathrm{Stab}_{\mathrm{n}}(\mathcal{D}_{X/Y})$ のある連結成分の幾何的記述を与えていることになる。実際、各双有理モデルに対応した極大体積極限の近傍が稠密に入っていることになる。次の目的は以下の定理である。

Theorem 0.3 $\mathrm{Stab}^{\circ}_{\mathrm{n}}(\mathcal{D}_{X/Y})$ を上の定理で与えられる連結成分とする。この時、有限個の複素余次元１の超平面 $H_v \subset N^1(X/Y)_{\mathbb{C}}$ が存在し、写像

$$\mathcal{Z}_{X,\mathrm{n}} \colon \mathrm{Stab}^{\circ}_{\mathrm{n}}(\mathcal{D}_{X/Y}) \longrightarrow N^1(X/Y)_{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_v H_v$$

は被覆写像になる。$\mathcal{Z}_{X,\mathrm{n}}$ は stability condition をそのセントラルチャージに送ることで与えられる。

この定理は論文 [7] の主定理の３次元版である。論文 [7] においては２次元の特殊事情を用いた論文 [5] の議論を用いているが、本論分の様な３次元以上の状況では論文 [5] の議論は使えない。そのため、本論分においては別証明を与えている。

なお、パート II の結果、stability condition 及び導来圏に関する最近の話題については T.Bridgeland 氏の ICM 講演 [6] からも参照できる。

謝辞

本論分を作成するにあたり、大学４年時のセミナーから著者に研究者となるべく指導して下さった川又雄二郎先生には大変お世話になりました。またセミナー及び学会等では、小木曽啓示先生をはじめとする川又研の諸先輩方にも大変お世話になりました。厚く御礼申し上げます。

又、本論分のパート II は２００５年９月から１２月にかけて著者がシェフィールド大学に訪問している際に執筆しました。この間、著者のイギリスでの生活面での支援、及び stability condition について研究するきっかけを与えて下さった T.Bridgeland 氏には心より感謝申し上げます。

参考文献

[1] S. Barannikov. Generalized periods and mirror symmetry in dimensions $n > 3$. *preprint*, pp. 1–51, 1999. math.AG/9903124.

[2] O. Ben-Bassat, J.Block, and T.Pantev. Non-commutative tori and Fourier-Mukai duality. *preprint*, pp. 1–79, 2005. math.AG/0509161.

[3] T. Bridgeland. Flops and derived categories. *Invent.Math*, Vol. 147, pp. 613–632, 2002.

[4] T. Bridgeland. Stability conditions on triangulated categories. *preprint*, pp. 1–21, 2002. math.AG/0212237.

[5] T. Bridgeland. Stability conditions on $K3$ surfaces. *preprint*, pp. 1–41, 2003. math.AG/0307164.

[6] T. Bridgeland. Derived categories of coherent sheaves. *The manuscript for the ICM talk in 2006*, pp. 1–21, 2005.

[7] T. Bridgeland. Stability conditions and Kleinian singularities. *preprint*, pp. 1–13, 2005. math.AG/0508257.

[8] T. Bridgeland. Stability conditions on a non-compact Calabi-Yau threefold. *preprint*, pp. 1–20, 2005. math.AG/0509048.

[9] T. Lowen and M.Van den Bergh. Deformation theory of abelian categories. *preprint*, pp. 1–44, 2004. math.CT/0405226.