論文審査の結果の要旨

氏名 戸田幸伸

論文提出者 戸田幸伸 は, 代数多様体の連接層の導来圏の研究を行い, 興味深い結果を得た. 論文の前半では, 連接層のアーベル圏の 1 次微小変形の理論を展開し, 導来圏の間の Fourier 向井変換が微小変形に延長されることを証明した. 後半では, 3 次元多様体のクレパントで小さな縮小写像に対して, 相対的導来圏の上の安定性条件全体のなすモジュライ空間の構造を決定した. これらはいずれも導来圏の構造に関する重要な結果である.

小平 Spencer の変形理論によれば, 代数多様体 X の 1 次微小変形は, 通常のコホモロジー群 $H^1(X, T_X)$ によって記述される. X 上の連接層全体のなす圏 $(\mathrm{Coh}\ X)$ はアーベル圏をなす. 元の多様体 X は圏 $(\mathrm{Coh}\ X)$ から復元することができる. X の変形があれば, 圏 $(\mathrm{Coh}\ X)$ の変形が得られる. しかし, 後者はもっと多くの変形を持つ. 戸田氏はまず, 圏 $(\mathrm{Coh}\ X)$ のアーベル圏としての 1 次微小変形を, Hochschild コホモロジー群 $HH^2(X)$ を使って具体的に記述した. Hochschild-Kostant-Rosenberg によれば, $HH^2(X)$ は直和 $H^2(\mathcal{O}_X) \oplus H^1(T_X) \oplus H^0(\bigwedge^2 T_X)$ と同型になる. ここで, 第 2 項が多様体の変形に対応している. 第 1 項は層の圏をねじれ層の圏に変形することに対応し, 第 3 項は非可換構造層を持つ多様体への変形に対応する.

さて, アーベル圏 $(\mathrm{Coh}\ X)$ から作られた有界導来圏 $D^b(\mathrm{Coh}\ X)$ を考える. 二つの代数多様体 X と Y が同型ではないにもかかわらず, それらの導来圏が同値になる場合がある. このような同値関手 $D^b(\mathrm{Coh}\ X) \to D^b(\mathrm{Coh}\ Y)$ を Fourier 向井変換と呼ぶ. 例えば, X がアーベル多様体で, Y がその双対アーベル多様体である場合が最初に発見された向井の Fourier 変換である. 戸田氏は Fourier 向井変換があるような多様体の組に対して, $(\mathrm{Coh}\ X)$ と $(\mathrm{Coh}\ Y)$ の 1 次微小変形を研究し, 変形されたアーベル圏上に作られた導来圏の間に, 与えられた Fourier 向井変換が延長されることを証明した. X がアーベル多様体で, Y がその双対アーベル多様体である場合をとると, X のねじれ層方向の変形が, Y の非可換変形方向に対応したりするが, 導来圏をとれば同値になることがわかるのである.

論文の後半では, 戸田氏は安定性条件のモジュライ空間の研究をした. 導来圏のような三角圏 D の上の安定性条件とは, 中心電荷と呼ばれる K 群からの加法的写像 $Z : K(D) \to \mathbb{C}$ と, 部分圏の族 $P(\phi)$ ($\phi \in \mathbb{R}$) の組であって, 適当な条件を満たすものであり, 安定性条件全体は複素多様体の構造を持つことが知られている. 理論物理学のミラー対称性予想によれば, Calabi-Yau 多様体の複素構造のモジュライ空間は, そのミラー Calabi-Yau 多様体の安定性条件のモジュライ空間を同型になると予想されている. 戸田氏は, 3 次元のクレパントで小さな縮小写像 $f : X \to Y$ に対して, 例外集合 C 上に台を持つ連接層の導来圏 $D^b_C(\mathrm{Coh}\ X)$ を考え, その安定性条件のモジュライ空間を記述した. 安定性条件には, X のフロップ X' 上の連接層のアーベル圏 Coh X' に対応した t 構造の上に構成された幾何学的な安定性条件と, McKay 対応によって定義された t 構造の上に構成された代数的な安定性条件の 2 種類があることを示した. そして, それぞれの場合にモジュライ空間が具体的に記述できることを示し, X のフロップたちに対応したモジュライ空間の分割の存在を証明した.

以上の結果は, 代数多様体の導来圏の研究の発展に大きく貢献するものである. よって, 論文提出者 戸田幸伸 は, 博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める.