論文内容の要旨

論文題目

Stability of Flowing Plasmas – Non-Hermitian Generator, Singularities　and Variational Principle
（流れをもつプラズマの安定性　－　非エルミート生成作用素、特異性、変分原理）

氏名　　廣田　真

１．研究背景

近年、天体プラズマや実験室プラズマにおいて、流れが引き起こす構造とダイナミックスに注目が集まっている。本研究では流れをもったプラズマの平衡の線形安定性解析を行った。プラズマ中の流れが揺らぎ（摂動）の安定性にどのような影響を与えるのかという問題は、さらに複雑な非線形現象や輸送現象を理解する上でも根本的なテーマである。しかし、平衡に流れを加えて解析することは、従来の理論に単に流れの効果を付加して解ける程度の問題ではなく、安定性解析手法の根本的な見直しを必要とする。これは方程式の非エルミート性に起因する難しさであるとも言える。

プラズマ物理では流れのない平衡（圧力と電磁気力のみのバランス）についての歴史が長く、MHD(magneto-hydrodynamics)の教科書[1]ではしばしば、プラズマの摂動場 $\xi(x,t)$ に対して、

$$\rho\partial_t^2\xi = F\xi \qquad (1)$$

という時間発展方程式が導出されている。ここで、$\rho(x)$ は平衡の密度分布であり、F は"force operator"と呼ばれる線形作用素である。プラズマの安定性解析手法としては「固有モード解析（分散関係）」と「エネルギー原理」がよく用いられる。これら二つの手法は「流れが無い場合」にはほとんど等価であり、どちらも安定性の必要十分条件を与える。これは F がエルミート（自己共役）作用素であることに強く依存している。エルミート作用素のスペクトル分解理論は Von Neumann の定理によって数学的に完成されており、量子力学のシュレディンガー方程式と同様にスペクトル分解できることが保証されている。しかし、平衡に流れ場 $v(x,t)$ が存在すると、摂動を支配する時間発展方程式は

$$\rho\partial_t^2\xi + \rho v\cdot\nabla\,\partial_t\xi = F\xi \qquad (2)$$

のように時間の一階微分を含んだ項が加わる[2]。F は依然としてエルミート作用素ではあるが、発展方程式の生成作用素(generator)は非エルミートになり、スペクトル分解が数学的に解けていない問題となる。具体的に言うと、流れが存在する場合には固有モード解析やエネルギー原理と

いった従来の手法は不完全になってしまう。

2．アルフベン連続スペクトルの共鳴による非指数関数的不安定性

一般に非エルミート作用素Lを生成作用素とする発展方程式$i\partial_t f = Lf$ において、固有モード解析では解 f の安定性の「必要条件」しか得られない。すなわち、解を $f \propto e^{-i\omega t}$ と仮定し、Lの固有値ωが全て実数だとしても、縮退した固有値が存在すると、共通の周波数を持った波同士の共鳴によって非指数関数的に成長する不安定性が生じうる（モードの独立性や重ね合わせの原理が破綻する)。この現象は、 f が有限自由度でLが行列の場合には線形代数学において解明されており、Lはジョルダンの標準形に変換できる[3]。有限自由度系では一般にモードの振幅が時間のべき関数$t^n e^{-i\omega t}$ で増大することが知られている。

しかし、連続スペクトルが縮退した場合に生じる揺らぎの挙動は数学的にもまったく定式化されておらず、本研究ではそのような非エルミート性に起因する新たな非指数関数的不安定性に着目した。本研究ではアルフベン連続スペクトル[4]の最も単純なモデルにおいて、共鳴が起きているかどうかを考察した。流れと磁場のシアを両方含んだ非圧縮プラズマのスラブ平衡を考えると、各点でそれぞれに振動数の異なるアルフベン波が局在しており、連続スペクトルを形成している。アルフベン波には二種類の偏波と二種類の伝播方向があるため、合計で 4 つの連続スペクトルが存在していることがわかる。生成作用素は

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & N \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}$$

といった形をしており、 $L_{1,2}$、 N はそれぞれ線形作用素である。 L_1 と L_2 はモードの偏波方向が異なるものの、全く同じ周波数帯のアルフベン連続スペクトルをそれぞれ二つもっている。これらは縮退しているばかりか、非対角成分N まで存在し、ジョルダンの標準形とよく似た構造をしている。

本研究では、特異な関数に厳密な定義を与えることができる佐藤超関数理論[5]を応用して、揺らぎが漸近的に成長するかどうかを調べることに成功した。一般の発展方程式$i\partial_t f = Lf$ に対して、 $f(t)$のラプラス変換を$\hat{F}(\Omega)$とすると、これがΩの複素平面上で特異になる（正則でない）ところが作用素Lのスペクトルである。ωが連続スペクトルに属するとすると、$\hat{F}(\Omega)$を定義関数として

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\hat{F}(\omega + i0) - \hat{F}(\omega - i0)\right]$$

のように与えられる超関数を特異固有関数とみなせる。解析的に解ける例として線形化 Vlasov 方程式を考えると、連続スペクトルに相当する固有関数はデルタ関数などを含んだ特異な関数であり、これは Van Kampen モードと呼ばれる。上記の議論はラプラス変換に基づいているので、これらの特異な固有関数の集合が、ランダウ減衰などを引き起こす初期値問題の解と等価であることを意味する(完全系を成す)。よって、点スペクトルと同様に、連続スペクトルに対しても特異固有関数で揺らぎのモード分解が行えることを示唆している。

Lが非エルミート作用素の場合の難しさは、連続スペクトルが縮退して相互作用(共鳴) をすることである。本研究では、トカマクでいうところの有理面に相当する位置において、4 つのアル

フベン連続スペクトルが複雑に共鳴していることを発見した[6]。この不安定性は有理面に局在化しており、グローバルなモードとして観測されることはないが、これが成長すると乱流を生成したり、磁気リコネクションの引き金になりうると予測される。一方、L_2 の解からは磁気島が生成される現象が見つかる。興味深いことに、流れのシアが磁気シアよりも強くなると磁気島がミキシングによって消滅することもわかった。

３．流れをもった平衡に対する変分原理

流れをもった MHD 平衡の安定性解析に古くから用いられている方程式は(2)である。ξ はラグランジュ変位と呼ばれ、プラズマの微小な変位を表すベクトル場である。この方程式ではエネルギー保存則

$$\langle \rho \partial_t \xi, \partial_t \xi \rangle + U(\xi) = \text{一定} \tag{3}$$

が成り立っており、$U(\xi) = -\langle \xi, F\xi \rangle$ が正定値であれば、ξ のノルムに上限があることがわかる。よって、流れがある場合にもエネルギー原理を適用することができるが、これは安定性の「十分条件」しか得ることができない。すなわち、$U(\xi)$ が不定値であったとしても、それは不安定性を意味するわけではない。さらに、流れが存在するとほとんどの場合 $U(\xi)$ が不定値になるという問題点が知られている。本研究ではこのような問題を解消する手法として dynamically accessible variation (DAV)[7]と呼ばれる変分について考察した。これはカシミール不変量を一定に保つような特殊な変分として近年着目されており、DAV を用いた変分原理はエネルギー原理よりも幾分改善された安定性の十分条件を与える。

一般に様々な流体方程式が $\partial_t G = \{G, H\}$ というハミルトン方程式で書くことができる[7,8]。G は密度、流速、磁場といった変数の任意の汎関数である。H は流体のハミルトニアンであり、$\{,\}$ はポアソンの括弧である。任意の汎関数 G に対して、$\{G, C\} = 0$ となるような汎関数 C はカシミール不変量と呼ばれる保存量である。汎関数 G の DAV とは任意の汎関数 K に対して、$\delta G_{da} = \{G, K\}$ で定義される変分である。このような変分をとると自動的に $\delta C_{da} = 0$ であり、DAV は理論上すべてのカシミール不変量を一定に保つ特別な変分であることがわかる。興味深いのは、密度や圧力、磁場といった変数の DAV を計算すると、ラグランジュ変位で表した密度、圧力、磁場と同じ形をしていることであり、これはラグランジュ変位が質量、エントロピー、磁束などのカシミール不変量を一定に保つ摂動であったことを裏付けしている。ただし、流速の摂動については DAV とラグランジュ変位では形が異なり、DAV では渦度を一定に保つのに対し、ラグランジュ変位は渦度を変化させてしまうことがわかる。DAV によるハミルトニアンの第二変分 $\delta^2 H_{da}$ は(3)とよく似ているが、運動エネルギーが別の表現に変わり、$\delta^2 H_{da}$ はエネルギー原理の(3)よりも正定値になりやすい。

また、ハミルトン方程式では、第一変分 $\delta(H + C) = 0$ によって平衡状態が得られ、さらにその平衡において第二変分 $\delta^2 (H + C) = 0$ が正定値かどうかを調べることで安定性が解析できる（リアプノフ安定性）[8]。本研究では $\delta(H + C) = 0$ で与えられるような平衡に対しては、この DAV による安定性解析が摂動を制約しているにもかかわらずリアプノフ安定性を与えることを示すことができた。この時、任意の摂動は dynamically accessible な成分と non-accessible な成分との和に分解することができ、non-accessible な成分は時間的に変化しないことがわかる。

４．Hall MHD の線形安定性解析

Hall 効果は二流体効果とも呼ばれ、これが存在すると磁束はイオンの流れではなく、電子の流れに凍りついている。Hall MHD では流れ（イオン）と磁場（電子）が別々に運動できるため、多様な流れを持った平衡が存在すると考えられており、それらの安定性にも関心が集っている。本研究ではエネルギー原理や上述の DAV を用いて Hall MHD の安定性解析を行った。

本研究ではまず、Hall MHD 方程式に対して(2)に相当するラグランジュ変位による定式化を行った。ただし、イオンと電子のそれぞれの変位場 $\xi(x,t), \xi_e(x,t)$ を導入する必要があり、$\eta = \xi_e - \xi$ とすると、結果として、

$$Q\partial_t^2\zeta + A\partial_t\zeta = H\zeta$$

という縦ベクトル $\zeta = {}^t(\xi,\eta)$ に対する発展方程式が得られた。さらに、Q と H はエルミート（対称）、A はアンチエルミート（歪対称)な 2x2 行列作用素であることも証明できた。ちなみに、$\eta = 0$ においてこの方程式は(2)に一致し、MHD の場合が再現される。このような対称性をもつ方程式には(3)と同様なエネルギー原理が存在する。ただし、流れが存在する時はやはりポテンシャルが不定値になるので、本研究では前述の DAV を用いた安定性解析手法を適用した。応用例としては、具体的に double Beltrami 平衡[10]に対して安定性の十分条件を求めた。

[1] J. P. Freidberg, *Ideal Magnetohydrodynamics* (Plenum Press, New York, 1987).

[2] E. Frieman and M. Rotenberg, *On Hydromagnetic Stability of Stationary Equilibria*. Rev. Mod. Phys. **32**, 898 (1960).

[3] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators* (Springer-Verlag, New York, 1976).

[4] A. Hasegawa and C. Uberoi, *The Alfven wave*. (Natl. Tech. Inform. Service, Springfield, Virginia, 1982).

[5] I. Imai, *Applied hyperfunction theory*, edited by M. Hazewinkel (Kluwer Academic Pub., Dordrecht, 1992).

[6] M. Hirota, T. Tatsuno and Z. Yoshida, *Resonance between continuous spectra: Secular behavior of Alfven waves in a flowing plasma*. Phys. Plasmas **12**, 012107 (2005).

[7] P. J. Morrison, *Hamiltonian description of the ideal fluid*. Rev. Mod. Phys. **70**, 467 (1998).

[8] D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu and A. Weinstein, *Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria*. Phys. Rep. **123**, 1 (1985).

[9] M. Hirota, Z. Yoshida and E. Hameiri, *Variational principle for linear stability of flowing plasmas in Hall magnetohydrodynamics*. Submitted to Physics of Plsmas.

[10] S. M. Mahajan and Z. Yoshida, *Double Curl Beltrami Flow: Diamagnetic Structures*. Phys. Rev. Lett. **81**, 4863 (1998).