論文の内容の要旨

論文題目 “*Multifractal Scaling and Functional Renormalization Group in Disordered Electron Systems*”
「乱れのある電子系におけるマルチフラクタルスケーリングと汎関数繰り込み群」

氏名 笠 真生

ランダムネスの存在下では、クリーンな系には見られない臨界現象、臨界点が現れることがある。代表的な例は、スピングラス系に見られる多重臨界点、不規則電子系における Anderson 金属-絶縁体転移などであり、ランダム臨界点と呼ばれている。クリーンな系の古典的臨界現象は、スケーリングと繰り込み群の導入により、今や非常によく理解されていると言ってよい。しかしながら、ランダムな臨界点、臨界現象に対する我々の理解は、クリーンな場合に比べると非常に初歩的なレベルに留まっているのが現状である。

それでは、ランダム臨界点は、クリーンな系の臨界点と比べて一体どのような点において異なっているのであろうか？まず一つには、ランダム臨界点近傍では局所的な物理量が統計的に激しく揺らぐことが挙げられる。ランダム系では、物理量は乱れの配置に依存したランダム変数であり、局所的な量、例えば、相関関数や、Anderson 局在の問題におけるコンダクタンスや局所状態密度 (LDOS) などは、熱力学極限においてさえもサンプルごとに揺らぎ得る。また、局所的物理量の統計的な揺らぎは、その空間分布、空間的構造にも顔をだす。ランダム臨界点直上で物理量の q 次のモーメントのシステムサイズ依存性を考えると、異なった q に対しては、異なった臨界指数でスケールするという現象が見られる。すなわち、ランダム臨界点を特徴づけるのには、単一の臨界指数 (フラクタル次元) ではなく、臨界指数のスペクトラムが必要であり、マルチフラクタル的であるいわれる。

ランダム臨界点の以上二つの特徴は、物理量の平均値だけでなく、その分布関数全体を解析の対象にしなければならないことを強く示唆している。従って、クリーンな臨界現象に対する解析の基本的な道具である繰り込み群を、ランダムな臨界現象において適用するのであれば、それは物理量の分布関数全体に対して定式化されなければならない。

以上のような問題意識に基づき、本博士論文では、ランダムネスが引き起こす臨界現象と、それに対する繰り込み群のアイデアの適用に対する理解を深めるべく、エネルギースペクトラムにカイラル対称性と呼ばれる粒子正孔対称性が課された系の Anderson 局在の問題を、1 次元、2 次元において議論した。

不規則電子系は、Wigner-Dyson 以来、時間反転対称性とスピン回転対称性の観点から三つのクラス (オーソゴナル、ユニタリ、シンプレクティック) に分類されていた。ところが９０年代後半になると、粒子正孔対称性を伴った Anderson 局在の問題は、これらスタンダードなユニバーサリティクラスとは異なったクラスに属することが認識されるようになる。これらの粒子正孔対称性を持つユニバーサリティクラスには大きく分けて二つの種類があり、それぞれ Bogoliubov-de Gennes クラス、カイラルクラスと呼ばれる。カイラルクラスは、特にユニタリ演算子によって粒子正孔対称性が実現されている場合を指し、その典型例は、バイパータイト格子状で定義された強束縛模型において、飛び移り積分にランダムネスを導入した模型 (ランダムホッピング模型) である。

粒子正孔対称性をもつユニバーサリティクラスの研究は、高温超伝導体に代表される、異方的超伝導体における乱れの効果が大きな関心を集めたのを契機に、９０年代半ばから大きな盛り上がりをみせるようになった。カイラルクラスの模型は、量子ホールプラトー間転移に関連する問題、d 波超伝導体におけるの乱れの効果、分数量子ホール効果や強相関電子系におけるゲージ理論のアプローチ、あるいは量子色力学の現象論、などの観点から注目を集めるようになった。また、粒子正孔対称なクラスが、ランダムな臨界現象に対する理解を深めるのに、ある種の突破口となり得る点も注目された。というのも、粒子正孔対称性のある系では、2 次元以下でも Anderson 転移が起こり得るので、より詳細に調べることができるからである。また、これらの系では、臨界現象を１粒子 Green 関数 (状態密度) を使って調べることができる。このことは、２粒子 Green 関数 (輸送現象) を使って Anderson 転移を議論する必要があるスタンダードクラスと比べると、シンプルであると言える。

粒子正孔対称性がある系では、エネルギースペクトラムの中央 (ゼロエネルギー) は粒子と正孔の入れ換えに対して不変であるという点で特別である。１次元、２次元のカイラルクラスにおいては、ゼロエネルギーは局在-非局在の転移点になっており、状態密度 (DOS) に臨界現象が見られる。このことは、１次元に対しては 1953 年に Dyson によって、２次元に対しては 1993 年に Gade によって、それぞれ最初に議論された。Dyson は、１次元のランダムホッピング模型の DOS $\nu(\varepsilon)$ がエネルギー ε の関数として、バンドの中央 ($\varepsilon = 0$) で

$$\nu(\varepsilon) \quad \propto \quad \frac{1}{|\varepsilon|(\ln|\varepsilon|)^3}$$

の関数形で発散することを示した (Dyson 特異性)。その後、Dyson 特異性はランダムホッピング模型のバンドの中央での局在長の発散や、特異なコンダクタンスの分布に関係していることが明らかにされた。一方 Gade は、２次元のランダムホッピング模型に対し、DOS は

$$\nu(\varepsilon) \quad \sim \quad |\varepsilon|^{-1} \exp\left(-c|\ln\varepsilon|^{1/2}\right)$$

のような特異性を示すと主張した (Gade 特異性)。１次元の場合と同様に、この特異性に対応して、バンド中央の波動関数は非局在であり、マルチフラクタル的であることが明らかにされた。

しかしながら既に述べた通り、ランダムな臨界現象においては物理量の平均値 (この場合、DOS ＝ LDOS の平均値) だけではなく分布関数全体を解析の対象とすべきである。そこで本博士論文では、LDOS の分布関数が、ランダムホッピング模型のバンドの中央付近でどのように振舞うのかを問題にした。まずは１次元の場合に対し、LDOS 分布を、散乱行列の分布関数に対する汎関数繰り込み群の方程式である、Dorokhov-Mello-Pichard-Kumar(DMPK) の方程式によって計算した。DMPK の方法は従来は、ある一つのクラスに対して特化して用いられてきた。しかしながら本博士論文では、ランダム臨界点から離れるに従い物理量の分布がどう変化するかを議論するために、DMPK の方法を拡張し、ランダムホッピング模型のバンドの中央、バンドの中央から遠く離れた局在相 (＝スタンダードクラス)、そして両者の中間的領域、を統一的に議論できるようにした。

この拡張したDMPKのアプローチを用いて、ランダムホッピング模型の非局在転移点直上でのLDOSの厳密な分布、及び、非局在転移点から離れていった時の分布関数の振舞いを得ることができた。1989年にAltshulerとPrigodinによって計算された局在相におけるLDOS分布と比べて、非局在転移点に近付くにつれ、分布関数の裾野が非常にブロードになっていく様子を定量的に議論することができた。また副産物として、局在長およびコンダクタンスの分布関数に対する議論も行った。

次に、２次元のランダムホッピング模型のLDOS分布に対し、有効場の理論と繰り込み群を使って解析を行った。この模型のバンドの中央は臨界点(線)になっており、理論に無限個の負のスケール次元のオペレーターが存在する。このことは、冒頭で述べた、激しいサンプル間の揺らぎとマルチフラクタル性という、ランダム臨界点の二つの特徴を如実に顕している。というのも、分布関数に対して繰り込み群を適用するのならば、関数の形を特徴づけるための無限個のパラメタ(分布関数のモーメント)が必要であり、そのために無限個の独立したスケーリングオペレーターが存在しなくてはならないからである。

本論文では、これらの無限個のスケーリングオペレーターに対し１ループの繰り込み群の解析を行い、LDOS分布が従う汎関数繰り込み群方程式は、Kolmogoroff-Petrovsky-Piscounoff(KPP)方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式に帰着されることを示した。このKPP方程式は、フリージングと呼ばれるグラス的な振舞いを示すことが数学者達によって調べられている。このグラス的な振舞いはLDOSの平均値であるDOSにも直接反映され、バンド中央でのDOSの発散は、これまで信じられてきたGade型の発散$|\varepsilon|^{-1}\exp\left(-c|\ln\varepsilon|^{1/2}\right)$ではなく、

$$\nu(\varepsilon) \quad \sim \quad |\varepsilon|^{-1}\exp\left(-c|\ln\varepsilon|^{2/3}\right)$$

で与えられることがわかる。この結果は、Motrunich、Damle, Huseらのランダムネスの強い極限からの描像とコンシステントである。

ランダムネスによって引き起こされる非自明な固定点(線)に直接アクセスでき、スケーリングオペレーターのスペクトラムを完全に決定できること、そして、理論のnon-untarityを反映して負のスケール次元のオペレーターが無限個存在すること、さらに、それらのランダム系固有の難しさに関わらず、固定点の回りでの繰り込み群の流れをコントロールできこと、しかも、それがランダム系に特有な臨界現象に直接関係していること、これらの点で２次元のランダムホッピング模型はユニークである。本論文で開発されたランダム系に特有な様々な概念や手法が、量子ホールプラトー間転移などのカイラルクラス以外Anderson局在の問題の問題や、ランダムスピン系などの不規則古典統計系にフィードバックされていくものと期待している。