論文の内容の要旨

論文題目　　ボート航行距離方程式の粘性解とその応用
氏　　名　　西　田　徹　志

本論文は，流れをともなう水面上を動くボートをモデル化したボート航行距離という新たな距離を導入し，その距離を安定に計算する数値計算法の構成について研究したものである．ボート航行距離とは，連続な流れがある 2 次元平面上に始点と終点が与えられたとき，ボートがその間を移動するのにかかる最小時間のことをいう．また，ボート航行距離を達成する経路のことを最短経路と呼ぶ．本研究では，ボート航行距離を計算する問題を，常微分方程式の初期値問題および偏微分方程式の境界値問題として定式化できることを示し，それぞれの定式化に対して安定な数値計算法の提案を行った．そして，数値計算により，その有効性を示した．

ボート航行距離およびその最短経路を見つける問題は，航路や飛行路の最適設計などの実用的な面から鑑みても，大変意味のある問題である．このような問題は，最適制御問題に帰着される．すなわち，始点と終点を結ぶあらゆるボートの経路を考え，それぞれの経路にかかる時間を計算し，その中から最短時間および最短経路を見つけるという問題となる．

この最適制御問題を解く既存の方法として，次の二つが挙げられる．　一つは等時間曲線法を利用する解法である．等時間曲線とは，始点から一定時間後に到達し得る領域の外側境界のことであり，それらを逐次求めて最短経路を決定する方法が等時間曲線法である．その計算方法の概略を示す．ある時間における等時間曲線を有限個の点で近似する．そして，その各点に対していくつかの方向に一定時間動かし，最も遠くに行ったものを採用す

る．そして，それらから，次の等時間曲線を決定する．これを始点から終点に達するまで行うことで最短経路を得る．もう一つの方法は，動的計画法を利用する方法である．始点と終点を含む領域に格子点を配置し，その格子点間に無数のネットワークを構成する．そして，その格子点間の到達時間を計算しておき，動的計画法により始点と終点を繋ぐ最短経路を求める方法である．

しかしながら，どちらの方法においても，この問題がもつ物理的な性質を考慮していないため，効率の悪い計算を行うことになる．本論文では，この問題がもつ物理的性質を導出し，それをもとに常微分方程式の初期値問題および偏微分方程式の境界値問題に定式化し，それぞれの定式化に対して効率的かつ安定な数値計算法を提案している．

最適制御の世界では，ボート航行距離のような関数のことを値関数と呼ぶ．最適制御における基本は動的計画原理である．動的計画原理が成立するとき，値関数が滑らかならば，値関数からベルマン方程式と呼ばれる非線形方程式が現れる．すなわち，値関数はそのベルマン方程式の解となっている．このことを踏まえ，第 2 章で，ボート航行距離を最適制御の最小時間問題の値関数として定義する．そして，ボート航行距離が動的計画原理を満たすことを示し，動的計画原理の基礎方程式であるベルマン方程式を導いている．そして，ベルマン方程式から，ボート航行距離を達成する経路が満たすべき条件を導いた．ボート航行距離を達成するためには，ボートが等距離曲線に対して垂直に進むべきであるということが導かれる．そこで，この性質を考慮することにより，ボート航行距離を計
算するための二つの定式化を行った．一つは，常微分方程式の初期値問題として定式化し，そこに出てくる方程式をラグランジュ的ボート航行距離方程式と名付けた．もう一方は，偏微分方程式の境界値問題として定式化し，オイラー的ボート航行距離方程式と名付けた．

本論文では，さらに，それぞれの定式化に対して，解を安定に計算する手法の提案を行った．

第 3 章では，ラグランジュ的ボート航行距離方程式を解くための方法について記述している．その方法はマーカー粒子法を改良したものである．マーカー粒子法は，初期境界を有限個の粒子で近似し，その粒子の動きを時間とともに追跡することにより，方程式を解く手法である．ラグランジュ的ボート航行距離方程式の場合，粒子の動きを決定するために，等距離曲線の法線方向を知る必要がある．そのため，近傍の情報を用いなければならない．近傍が滑らかであれば問題ない．しかしながら，最適制御の問題では，たとえ初期条件が滑らかであっても，あるところから滑らかでなくなることが知られている．つまり，近傍の情報を用いる限り，数値不安定性を引き起こすことになる．そこで，その不安定性を回避する方法を提案した．その方法は，近傍の情報を用いることなく計算する方法で，着目している粒子のみで独立に，次の方向を決定できる方程式を追加し，安定に解く方法である．

次に，第 4 章，第 5 章で，もう一つの方程式，オイラー的ボート航行距離方程式に対する性質および数値計算法について記述した．

前節で述べたように，最適制御の問題に置ける解は，一般に滑らかであるとは限らない．ゆえに，ボート航行距離をあらわす値関数は古典解として，オイラー的ボート航行距離方程式の解とはならないことがある．そこで解の条件を緩和したもの，つまり一般化された解(弱解)を考えなければならない．しかしながら，条件を緩和すると，それを満たす解が無数に出てくることは良く知られてた事実である．では，いかなる条件の下で弱解が一意に定まるのか，また，一意に得られた弱解が物理的な意味を持つ解になっているのかという問題を考えねばならない．しかし，オイラー的ボート航行距離方程式の場合，粘性解と呼ばれる弱解の理論を適用することで，これらはすべて解決される．粘性解は，1980 年代初頭に，Crandall と Lions によって，最適制御問題の値関数を表わすために導入されたものである．値関数は，ある種のハミルトン・ヤコビ方程式と呼ばれる 1 階の偏微分方程式の解である．その後，粘性解理論は発展し，今では，退化楕円型や退化放物型と呼ばれる 2 階の非線形偏微分方程式のクラスに対する一般化された解（弱解）のことを指す．粘性解の導入により，このクラスに属す偏微分方程式の初期値問題や境界値問題に対して，一意性や存在性をいうことができるようになった．第 4 章では，この理論を利用することで，ボート航行距離が，オイラー的ボート航行距離方程式の粘性解になっていることを示した．つまり，オイラー的ボート航行距離方程式の解の存在性および一意性の保証を行ったことになる．そして，第 5 章では，オイラー的ボート航行距離方程式に対する安定な数値計算法を提案した．その方法は，幾何光学にでてくるアイコナール方程式を効率的そして安定に解く Sethian の Fast marching 法を，ボート航行距離方程式用に改良したものである．Fast Marching 法は，風上差分を利用して，距離の小さい方から大きい方へ解いて行く方法である．しかし，Fast marching 法は，アイコナール方程式以外には適用できなかった．本論文では，風上差分を拡張することにより，Fast Marching 法をボート航行距離方程式に対して適用できるように拡張を行った．

第 6 章，第 7 章では，ボート航行距離方程式の応用および拡張について述べている．特に，ボロノイ図への応用を述べている．ボロノイ図は，空間に有限個の点を与えたとき，それらの点による空間の勢力圏分割のことで，画像処理や地理情報処理，有限要素法などの数値解法のためのメッシュ生成などいろいろな場面で広く利用されている．

ボロノイ図の主要な研究テーマとして，一般化がある．次元の一般化や生成元（線分，多角形，円など）の一般化，距離の一般化などが挙げられる．特に典型的なのが，距離の一般化である．最も基本的なボロノイ図は，平面上に生成元と呼ばれる点が与えられたとき，ユークリッド距離で測って，平面上の点がどの生成元に近いかによって平面を分割したものである．このユークリッド距離を他の様々な距離に置き換えることにより，様々な一般化ボロノイ図が提案されている．そこで，第 6 章では，ボート航行距離を使ったボロノイ図の提案をしている．これをボート航行距離ボロノイ図と呼んでいる．また，第 7 章では，平面から曲面へボート航行距離を拡張し，曲面上のボート航行距離ボロノイ図やスノーモービル距離ボロノイ図，森林火災ボロノイ図の提案も行っている．