

審査の結果の要旨

氏名 西田徹志

最適化は、限られた資源を有効に利用するための重要な数理手法である。特に、近年、地球資源の枯渇、環境の保護などの立場からその重要性は一段と高まり、各種の実用的場面で最適な解を効率よく求める手法の開発はますます必要とされている。しかし、現実に現れる最適化問題は多くの場合に非線形であり、効率よくかつ安定に解を求めることは容易ではない。したがって、少数の統一的手法による解決は難しく、個別の問題ごとにその特質を利用して解法を開発していく努力を積み重ねるしかない。

このような社会的背景のもとで、本論文は、航空機や輸送船が燃料最小の経路を選択する問題への応用を念頭に置いて、流れの中での最適経路を求める方法を構成したもので、「ボート航行距離方程式の粘性解とその応用」と題して8章から成る。

第1章「序論」では、本論文の目的、関連する先行研究について論じ、その中での本研究の位置づけを明らかにしている。

第2章「ボート航行距離とその二つの定式化」では、問題を数理的に定式化している。静水中では任意の方向へ等しい速さで進むことのできるボートが、与えられた流れの中で出発地から目的地まで移動するのに要する最短の時間をボート航行距離と名付け、この距離が満たすべき2種類の方程式を導いている。その第一は、ボートが最短経路に沿って動くときの位置が時間とともに変わる様子を定式化したもので、ラグランジュ的ボート航行距離方程式と名付けられている。その第二は、ボートの最適経路が、最適性の原理を満たし、したがって動的計画法の手法で扱えることに着目し、それぞれの場所への最短到達時刻を変数とする偏微分方程式に表したもので、オイラー的ボート航行距離方程式と名付けられている。これら二つの定式化に対して、それぞれ安定な解法を求めることが、本論文の主要な目的である。

第3章は、「ラグランジュ的ボート航行距離方程式に対する数値計算法」と題し、第一の定式化に対する解法を構成している。ラグランジュ的な方程式は、ボートに対応する粒子の経路を表すものであるが、従来のマーカー粒子法では経路の追跡が不安定になる。それは、計算に必要な到達時刻の勾配方向が特異点付近で正しく求められないためである。この困難を克服するために、局所的な最適経路自身は特異点をもたないことに着目し、近傍の粒子を使わないで勾配方向を推定する方法を構成した。そして、これを利用して解を安定に求める新しいマーカー粒子法を提案し、その有効性を計算実験によっても確かめている。

第4章「オイラー的ボート航行距離方程式と粘性解理論」では、第二の定式化の正当性を理論的に示している。オイラー的定式化によって得られたボート航行距離方程式は、古典的な意味での解をもたないため、解の探索範囲を弱解に広げて議論を進める必要がある。ここでは、ボート航行距離方程式がベルマン方程式とよばれる偏微分方程式のクラスに属

すことを示し、ベルマン方程式に関して既にわかっている知見をボート航行距離方程式に当てはめることによって、ある条件のもとで、値関数とよばれる特別な弱解がボートの最適航路に対応する粘性解であることを示すとともに、その解が常に存在し、かつ一意であることを確認している。これによって、本定式化の正当性が数理的に保証されたことになる。

第5章「オイラー的ボート航行距離方程式に対する数値計算法」では、第4章でその存在と一意性を証明した粘性解を求める安定で効率のよい二つの方法を構成している。その第一は、錐近似法と名付けられたもので、流れが局所的に一様であるとみなしたとき、1点から出発したボートの到達できる範囲が時空間において流れに応じて傾斜した軸をもつ錐体で近似できることを利用して、計算を進める方法である。精度よく錐体を推定するためのサンプル点の取り方を構成し、それによって到達時刻の計算が著しく改善されることを実験的に示している。また第二の方法は、拡張 fast marching 法と名付けられたもので、従来の fast marching 法が直交する二つの方向の差分のみを使うために計算が不安定になることを反省し、特性曲線をはさみ 45 度ずつ異なる二つの方向の差分を用いることによって、計算の安定性を確保している。

第6章は「ボート航行距離の応用」と題して、第5章で構成した方法をいくつかの場面に応用している。その第一は、各種の流れの中での最小到達時刻とそれを実現する経路の計算である。ここでは、特異点が現れる状況でも安定に計算ができることを示している。その第二は、森林火災のシミュレーションで、風のある環境で、燃えやすい枯草と燃えにくい森とが混在した平原において、火災が時間とともに燃え広がる様子が推定できることを示している。また、その第三は、ボート航行距離に基づいたボロノイ図の計算で、水面に係留されている多数のボートのどれが最も早く到着できるかに従って水面を分別するアルゴリズムを構成し、その有効性を計算実験によっても確かめている。

第7章「曲面上の距離」では、ボート航行距離の概念を曲面上へ拡張し、それに応じたボート航行距離とその解法を構成している。これによって、航空機や輸送船の地球規模での航路の最適化も可能にした。さらに、斜面を登ることが流れに逆らって進むことと等価で、斜面を下ることが流れに乗って進むことと等価であるという点に着目し、雪で覆われた斜面を移動するスノーモービルの移動時間に対応したスノーモービル距離方程式を導入し、本論文で構成した計算法が、この方程式の解法としても使えることを示している。

第8章「おわりに」では、本論文の成果をまとめるとともに、今後に残された課題を整理している。

以上を要するに、本論文は、流れのある環境で移動体が最短時間で到達するための経路を数理的に定式化するとともに、流れを求める安定で効率のよい計算法を構成し、それによって地球資源の有効利用のための数理的手段を提供したもので、数理情報学に大きく貢献するものである。

よって本論文は博士(情報理工学)の学位請求論文として合格と認められる。