

# 論文の内容の要旨

論文題目 Dynamical Systems Approach to the Busy Beaver Problem  
(ビジービーバー問題への力学系アプローチ)

氏名 行田悦資

本論文はビジービーバー問題として知られる計算機科学における問題を例にとり、単純な機械に単純な入力を与えた系のダイナミクスとその多様性について力学系の立場から議論する。

チューリング機械 (TM) は計算理論の分野で用いられる単純な計算モデルであり、任意の TM が停止するか否かを判定するチューリング機械停止問題は計算理論の核心である計算可能性を議論する際に重要な役割を果たす。ビジービーバー問題はこのチューリング機械停止問題の一種の変形版であり、次のように定義される。

TM はテープとマシンで構成され、通常はテープにプログラムやデータなどをあらかじめ記述して、内部に有限状態とその遷移規則を持つマシンがそのテープ上の文字を 1 文字ずつ読み書きしながら計算を行う。しかしここでは初期テープは空であるものとし、マシンの状態数を限定したうえで遷移規則を適当に決め計算を実行する。すると、あるマシンは何ステップか実行したのちに停止し、また別のマシンは無限ループに陥るなどして永遠に止まらなくなる。このうち最も多くの非空白文字を書き残して停止したマシンを状態数  $n$  のビジービーバーと呼ぶことにする。はたして任意の状態数  $n$  のビジービーバーを求める機械的な手続きは存在するだろうか？これがビジービーバー問題と呼ばれる問題であり、そのような万能な機械的な手続きは存在しないことが証明されている。また、ビジービーバーの書き残した文字数 (= スコア) の関数は計算不可能である。

一般に、計算理論における計算不可能性は万能チューリング機械 (UTM) と呼ばれる

特殊なTMに対する対角線論法を用いた証明を行って議論されるが、ビジービーバー問題の枠組みでは計算不可能な関数をより直接的に（段階的に）捉えることができ、その性質をコンピューターによる計算実験などを通して定量的に議論できるようになる。そのため低状態数のビジービーバーを探す努力がさまざまな研究者によって行われてきた。しかしながら状態数が増えるにつれてマシンの挙動は複雑化するため手に負えなくなり、わずか5状態のビジービーバーですら現在のところ決定できていない。

本論文は、このビジービーバー問題に対し力学系の視点からアプローチをとり、計算機実験をとおした計算不可能な関数の統計的性質の検証や、マシンの時空間パターンの分類とその力学的解釈を試みた。

### (1) 計算不可能な関数についての統計的性質

ビジービーバー問題ではスコアの他にもいくつかの計算不可能な関数を定義することができる。ある状態数におけるマシンの停止確率もまた計算不可能な関数のひとつである。本研究では、モンテカルロ法などを用いた計算機実験を行い、その結果、停止確率の分布関数は時間経過にしたがい指数分布からべき分布へ、さらに対数分布へと変化することが示された。この結果は斉藤氏らによるUTMへのランダム入力の停止確率の実験の結果と一致するが、より長い時間で分布の詳細を得ることができたので、停止確率の分布はどんな計算可能な関数よりも緩やかになるはずであるという理論的解釈をより端的に裏付けるものである。

### (2) 時空間パターンの分類と構成比の分析

状態数の変化に従い複雑化するマシンを特徴付けるため、マシンの位置情報のみに着目し、その時空間パターンにもとづいたマシンの分類を導入した。その結果、高スコアをあげるマシンは特徴的な運動パターンを示すこと、またそのパターンの構成比は時間経過にしたがって変化することがわかった。特に5状態においてはある特定のパターンにのみ収束し、そのパターンを示すマシンの中には現在ビジービーバーの有力候補と考えられているマシンも含まれている。この傾向は10状態程度までにおいて一般的であるようである。

### (3) アルゴリズムの力学的解釈

ビジービーバー問題と $3k+1$ 写像として知られる力学系との関連性は既に何人かの研究者によって指摘されている。本研究では、先に導入した時空間パターンによる分類のマシンについてそのアルゴリズムを力学系の視点からの解析を試みた。その結果、長時間において最大多数のパターンに属するマシン群は（確認できた限りにおいては） $3k+1$ 写像を拡張した切り替え写像と強い繋がりを持つことが認められ、この性質を利用すれば、現在発見されているビジービーバー候補についての限定された証明も可能

になるのではないかと考えられる。また、他のパターン分類に属するマシンについては、いくつかの力学系を組み合わせた干渉による不安定性を利用していることなどがわかったものの、依然として力学解釈の手に負えないパターンも存在する。

#### (4) 2次元ビジービーバー問題

テープを2次元に拡張した場合での計算機実験を行い、テープに残されたパターンの解析を行った。その結果、1次元の場合とは異なるものの、三角形セルでは多様なパターンの生成を見ることができた。パターンとそれを生成する力学系についての考察はまだほとんど手付かずであるが、一部のマシンについては一次元テープの場合と同様の切り替え写像を使っているものと予想している。