

論文の内容の要旨

論文題目 ベーテ仮説と周期箱玉系

氏名 竹野内 晃

箱玉系は 1990 年に最も簡単なソリトン系として高橋氏、薩摩氏によって提案された。ソリトン系と呼ばれる由縁は、無限個の保存量や N ソリトン解が存在するなどソリトンとしての性質 (散乱に対して安定、散乱前後で位相がずれる、大きなソリトンほど速いなど) をあまねく備えていたからである。

$t = 0,$... 11112211112111111111111111 ...
$t = 1,$... 11111122111211111111111111 ...
$t = 2,$... 11111111221121111111111111 ...
$t = 3,$... 11111111112212111111111111 ...
$t = 4,$... 11111111111121221111111111 ...
$t = 5,$... 11111111111112112211111111 ...
$t = 6,$... 11111111111111211122111111 ...
$t = 7,$... 11111111111111121111221111 ...

高橋・薩摩の箱玉系. (2-soliton)

それから数年後、ソリトン方程式や可解格子模型との関係が明らかになり、箱玉系は注目を集め始めた。これらのことをもう少し詳しく述べよう。箱玉系は Korteweg-de Vries (KdV) 方程式を超離散化することによって得られ、その結果箱玉系の N ソリトン解を KdV 方程式の N ソリトン解を用いて求めることができる。また絶対零度に相当する極限 ($q \rightarrow 0$) での可解格子模型のスピンの配置によっても箱玉系は実現される。そこでは転送行列の作用によって時間発展が起こり、量子群の対称性が可解格子模型から箱玉系へと受け継がれている。つまり箱玉系はそれぞれの極限によって (本質的な性質は残しつつ) 単純化された古典可積分系と量子可積分系の共通部分に存在している。したがって箱玉系の解析方法は、

- ソリトン方程式の性質を超離散化によって箱玉系へ輸出する方法。
- 箱玉系を結晶化 ($q \rightarrow 0$) された可解格子模型とみなし、ベーテ仮説や量子群の対称性 (結晶基底) を駆使する方法。

に大きく分けられる。

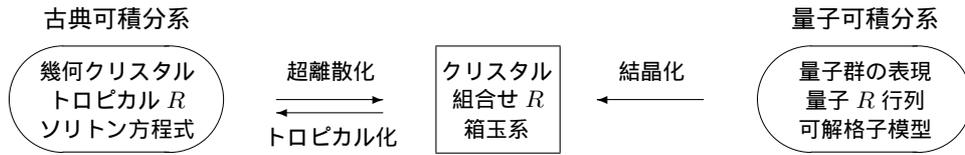


図1 箱玉系の位置付け

1990年代後半から2000年代前半にかけての精力的な研究により、箱玉系は拡張され、様々な手法によってその性質が次第に知られるようになった。可解格子模型的立場をとれば、拡張の方法はLie環の型やその表現を変えるのが代表的である。こうして拡張された箱玉系の時間発展は、繰り返し組合せ R を作用させることにより定義される。そこで必要となる(一般のLie環での)組合せ R の計算は複雑であったが、幡山氏らによって組合せ R が拡大affine Weyl群の平行移動として表されることが示された。さらに時間発展は、(表現論の知識を必要としない)簡単な粒子・反粒子的アルゴリズムによって記述されることがわかり、これにより(組合せ R による)時間発展の複雑な計算は、暗算で出来る程度のもになった。

拡張された箱玉系においても可積分性は保たれている。したがって N ソリトン解(τ 関数)は存在し、初期値問題を解くことが出来る。 τ 関数を得る1つの方法は、nonautonomous discrete Kadomtsev–Petviashvili (ndKP)方程式の超離散化である。もう1つの方法は、フェルミ公式に現れるcharge関数を用いる方法であり、これにより始めて一般の N ソリトン解が得られた。Kerov-Kirillov-Reshetikhin (KKR)全単射の明示式は、この τ 関数を使って書かれる。またKKR全単射を順・逆散乱写像とした箱玉系の逆散乱法が定式化できる。これにより時間発展は線形化され、初期値問題は解かれる。

超離散化された関数はすべて(max, minといった)区分線形関数である。したがって箱玉系を記述するのも区分線形関数となるが、これらを解析的に扱うのは難しい。そこで区分線形関数から(区分線形関数に比べ解析しやすい)有理関数へ戻す変換(逆超離散化)が考えられた。しかしながら超離散化の逆は一意的ではない。ゆえに逆超離散化の中で性質のよいものを採用する必要がある。この問題の1つの答えとして、トロピカル化と呼ばれる(可積分性から見て)性質のよい逆超離散化が存在する。トロピカル化された系は、幾何クリスタルの対称性を持ち、全正值性が保たれている。幾何クリスタルの積の同型を与えるのがトロピカル R であり、組合せ R のトロピカル化に相当する。量子 R 行列とは異なり、今のところトロピカル R を系統的に作り出す手段は存在しない。新しいトロピカル R が見つければ、それを超離散化することにより、組合せ R の区分線形表示が得られる。その他にも新しい箱玉系が定義でき、その τ 関数まで求まる可能性がある。

以上で述べた箱玉系はすべて無限系であるが、それ以外のものとして周期系、反射系といった箱玉系も提案された。これらの系においても無限系と同様な拡張が可能である。本論文では周期系のみを扱い、そこでの非自明な性質を結晶基底の理論やベータ仮説を利用し明らかにしておく。

周期箱玉系は2002年に由良氏、時弘氏によって考案された。最も基本的な周期箱玉系を簡単に紹介しよう。まず L 個の箱を周期的境界条件を課し1次元的に並べる。箱の容量は1であり、玉があるかないかの2状態をとる。この状態をそれぞれ文字 $2, 1$ で表す。またここでは空箱は玉の数 M より多いつまり $L \geq 2M$ と仮定する。この条件を満たす状態の集合を B_+ と書き、状態空間と呼ぶ。次に状態空間上に時間発展 $T_\infty : B_+ \rightarrow B_+$ を以下の操作により定義する。

- (i) 右側に1がある2に注目し、その隣り合った 21 ペアを線をつなぐ。
- (ii) (i)でつながれたペアを無視して(i)の操作をする。
- (iii) すべての2が1とつながるまで上の操作を繰り返す。

(iv) つながれた 1 と 2 の場所を交換する.

$L = 13, M = 6$ の状態 $1122212111122 \in B_+$ が時間発展する例を下に書く. (i) から (iii) までの操作は

$$\begin{aligned} & 1)122(21)(21)1112(2, \\ & 1)1)2(2(21)(21)1)11(2(2, \\ & 1)1)\left(2(2(21)(21)1)1\right)1(2(2, \end{aligned}$$

となる. 括弧の中はつながれた 21 ペアを表している. つながれた 1 と 2 を入れ替えると

$$T_\infty(1122212111122) = 2211121222111, \quad (1)$$

を得る. 一方この時間発展は可解格子模型的な見方が出来る. それは $q = 0$ での量子群 $U_q(A_1^{(1)})$ に付随する頂点模型の配置:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 122 & \vdash & 112 & \vdash & 111 & \vdash & 112 & \vdash & 122 & \vdash & 222 & \vdash & 122 & \vdash & 222 & \vdash & 122 & \vdash & 112 & \vdash & 111 & \vdash & 111 & \vdash & 112 & \vdash & 122 \\ & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

である. この図の上下の横一列を見比べることにより (1) が得られる. この一見異なって見える 2 つの時間発展が等価であることは本論文で示される. 可解格子模型の見方をすれば, 状態空間の文字 1,2 はそれぞれ up spin, down spin を意味し, 状態空間 B_+ は quantum space を表す. そして時間発展をもたらすのが転送行列の $q = 0$ 類似である^{*1}. 図の各頂点には組合せ R と呼ばれる R 行列の $q = 0$ 類似が作用している. 本論文では周期箱玉系をこのように可解格子模型的に扱い, そこでの非自明な性質を結晶基底の理論やベータ仮説を利用し明らかにした.

上で紹介した時間発展は可逆であり, 状態空間は有限集合なので任意の状態 $p \in B_+$ に対し $T_\infty^{\mathcal{N}}(p) = p$ となる自然数 \mathcal{N} が存在する. この \mathcal{N} は p の周期と呼ばれ, この周期を求めることは周期箱玉系誕生当初からの問題であった. その他にもこの箱玉系の初期値問題を解くという問題も存在した. そこで本論文では $q = 0$ と $q = 1$ のベータ仮説を組合せることにより, 逆散乱法を定式化し, これらの問いに答えた. ここでは rigged configuration, KKR 全単射, string center 方程式などの (組合せ) ベータ仮説の手法を, 準周期解の理論の超離散化に結びつけ, 周期箱玉系の作用・角変数, 超離散ヤコビ多様体, リーマン周期行列といった概念を提起した. 上で紹介した時間発展 (1) は非線形だが, 逆散乱法によって時間発展は角変数の集合上で線形化される. つまり箱玉系の時間発展は角変数の直線運動に変換され, 初期値問題は解かれる. 作用・角変数は, 状態から作用・角変数を分離する KKR 全単射によって得られる. 作用変数はヤング図形で表され, ソリトンのデータを持つ保存量となる. さらに逆散乱法の副産物として周期公式や状態数公式が導かれる.

以上はすべて最も基本的な周期箱玉系の場合であった. 上の模型の拡張法として玉の種類や箱の容量を増やすなどがある. このように拡張された周期箱玉系においても保存量や周期などを求める問題が存在する. そこで本論文では $A_n^{(1)}$ 型で最大限に拡張された周期箱玉系の周期公式を, $q = 0$ でのベータ固有値 (転送行列の固有値) を計算することにより予想した. またこの周期箱玉系の状態数公式が, ある指標公式に一致することを予想した. その他にも一般の周期箱玉系において, 様々な時間発展を導入し, それらが互いに可換であることおよび拡大 affine Weyl 群対称性を持つことを証明した.

^{*1} この図の場合, 補助空間は $\text{spin } \frac{3}{2}$ 表現となっている. この時間発展は T_3 と呼ばれる.