論文審査の結果の要旨

氏名　竹野内 晃

本論文の主題は，箱玉系と呼ばれる1次元の可積分セルオートマトンの解析である．箱玉系は1990年代初頭に発見され，全ての集団励起モードが多体衝突において安定であるなど，ソリトン系としての性質をあまねく備えた規範的なモデルとして様々なアプローチによる研究が行われている．その可積分性には二つの起源がある．一つはソリトン方程式の超離散化である．これは離散的時空間上で定義されるソリトン方程式に対し，可積分性を保ちつつ従属変数をも離散化する技法であり，90年代半ばに提唱された．箱玉系の運動方程式は可積分性な離散ロトカ・ボルテラ方程式の超離散化になっている．

もう一つの起源は可解格子模型の結晶化であり，90年代末に発見された．統計力学の格子模型には，イジング，ハイゼンベルグ模型などに代表される厳密解を許す一群の非自明なクラスが存在する．これらの模型が「絶対零度」で結晶化したスピン配置は箱玉系の時間発展プロファイルに一致する．

ソリトン方程式は古典可積分系であり，可解格子模型は量子可積分系である．この意味で，箱玉系は両者がそれぞれ超離散化と結晶化で歩み寄った接点に位置しており，可積分系における量子・古典対応に新たな知見をもたらす貴重な研究対象,「超離散可積分系」として認知されている．

本論文の特色は，対象として周期的境界条件を課した箱玉系を扱うこと，手法として量子可積分系の解析法であるベーテ仮説を用いることにある．周期系では状態空間は有限集合であり，時間発展は可逆である．このことから，保存量のスペクトルの決定，位相空間の等エネルギー集合への分割，各等エネルギー集合の状態の数え上げ，初期値問題，任意の状態の基本周期の決定など，幾つもの基本的な問題が浮上する．本論文の主結果は，ベーテ仮説により逆散乱法を定式化し，これらの問題を全て統一的な観点から解決したことである．量子可積分系の手法であるベーテ仮説が，超離散可積分系に対しても有効であるかは決して先見的に明らかではない．本論文はそれを周期系において初めて実証し，広範な一般化に関する予想までを網羅した総合報告である．先行結果を包括的に拡張し，概念的に深化させている．特に作用・角変数，順・逆散乱写像，ヤコビ多様体，リーマン周期行列といった可積分系で重要な構造の超離散化を提起し，ベーテ仮説や量子群の結晶基底との関係を見出したことはオリジナルな成果として高く評価される．以下，章ごとにその内容を概説する．

第1章では導入として，本論文の主題である箱玉系とその拡張についてこれまでの研究結果を概説している．特に周期系固有の問題やベーテ仮説の組み合わせ論に言及し，本研究の動機，位置づけ，意義等について述べている．

第2章では最も基本的な周期箱玉系を扱っており，本論文の中核となる結果を与えている．可解格子模型の結晶化は，付随する量子群の変形パラメーター q が0になる極限として達成される．$q=0$ における表現論は結晶基底の理論であり，これにより状態と時間発展が定義され，円環状に並んだ容量1の箱を占有しながら有限個の玉が移動する力学系との解釈が与えられる．次に組み合わせベーテ仮説を応用することにより作用・角変数を導入し，順・逆散乱写像を定式化している．角変数の空間はヤコビ多様体の超離散類似をなし，その上で時間発展が線形化されるという主定理が与えられる．初期値問題の解や基本周期の明示式は主定理の系として直ちに従う．また角変数と $q=0$ ベー

テ方程式のストリング根が1:1対応することが示され，状態数の明示式が導かれる．更にベーテ固有値が周期に関係した1の冪根になることが簡潔に証明されている．この性質は5章で応用される．

第3章では箱の容量を一般にした拡張系について，2章とほぼ同様の逆散乱スキームの予想を定式化している．

第4章ではアフィン・リー環 $A_n^{(1)}$ に付随した周期箱玉系の最大限の一般化を与え，その基本性質を考察した．これは玉が n 種類あり，各サイトごとに任意の幅と高さに相当する自由度を持った収容棚が配置された1次元の周期的セルオートマトンである．n 種の時間発展の系列 $T_j^{(1)},\dots,T_j^{(n)}$ を導入し，その可換性，拡張アフィン・ワイル群対称性を証明し，保存量 $E_j^{(a)}$ を構成した．また，計算機実験にもとづいて時間発展可能な状態のスペクトルを特徴づける予想を与えている．

第5章では4章で定式化した最も一般的な $A_n^{(1)}$ 型箱玉系について，ベーテ仮説に由来する二つの予想を提出している．それは力学的周期と保存量で特徴付けられる状態数の明示式であり，$q=0$ におけるベーテ固有値やベーテ根の数に関係する．これらは最も基本的な箱玉系について2章で証明された結果の自然な拡張であり，多くの計算機実験による極めて非自明な検証例と共に提示されている．

第6章では $A_n^{(1)}$ 型以外の非例外型アフィン・リー環に付随した周期箱玉系を定式化した．$A_n^{(1)}$ 型との定性的な違いとして対生成・消滅をする粒子系の様相を呈する．$D_n^{(1)}$ 型の場合に5章と同様の周期公式を予想している．

第7章では論文全体の要約と展望が述べられている．

付録A,B,Cにはそれぞれ結晶基底の理論，組み合わせベーテ仮説の基本的事項，本文中の定理・命題の証明の詳細が与えられている．

本論文は可積分系について新しい知見を提供している．証明や計算は，多くの例とともに具体的かつ明確に記載されており，内容，記述ともに学位論文の水準に達している．

なお本論文2，4，5，6章の一部は國場敦夫氏，高木太一郎氏との共同研究に基づくものであるが，論文の提出者が主体となって分析を行ったもので，論文提出者の寄与が十分であると判断する．

よって本論文は博士（学術）の学位請求論文として合格と認められる．