論文内容の要旨

論文題目　**Exact Analysis on Nonequilibrium Properties of One-Dimensional Stochastic Processes**

(１次元確率過程の非平衡的性質に関する厳密解析)

氏 名　内　山　　優

本研究は、１次元系の確率過程、特に厳密に解けるモデルを対象とし、非平衡現象に関する精密な議論を行った。主眼として２つの非平衡的性質、流れのある定常状態の性質、界面成長過程の漸近的時間発展について詳細に調べた。学位論文では、研究対象の導入を行った後、２つの性質に関してそれぞれ厳密に解けることで知られているモデルを説明し、解析結果の議論を述べた。

研究の背景

近年、非平衡系に関する研究がますます活発になってきている。一つには様々な現象にあふれ尽くせぬ興味を湧かせるという理由があり、緩和現象、反応拡散過程、界面成長、生体現象、経済現象、ネットワーク成長、交通流など我々の身近なところには数多くの非平衡的な現象がある。また、もう一つには非平衡系に関する一般的な基礎理論・基本的性質の確立がまだ未発達であり成果が待たれているという理由がある。平衡系については、熱力学・統計力学ともに基礎理論、定式化に関して完璧な理解が得られている一方で、非平衡系に関しては平衡系近傍の狭い範囲にのみ適用できる理論が得られているのみである。こうした背景の中で我々は様々な試行錯誤の段階にあると言ってよい。

特に近年活発に行われている研究は特定のモデルに関する研究である。昨今の計算機の発達により数値実験が容易になり、現象のモデル化・妥当性の議論がやりやすくなっている。その一方で、厳密に解けるモデルもいくつか見つかり研究されている。厳密に解けるモデルの優れている点は、物理量を解析的な表式で計算できるところで、計算機の数値的な限界に依存しないだけでなく、数学的に関係性、極限、評価の議論を曖昧さなく実行することができる。厳密に解けるモデルは現象論に対する実験場としての役割を果たすという意味でも重要性は疑いないものである。本研究では特に厳密に解けるモデル２つについて数学的事実を巧みに援用し非平衡現象の解析を行った。

１次元非対称排他過程–非平衡定常状態について

１次元非対称排他過程 (略称 ASEP) は１次元格子上の多体ランダムウォーカーの粒子系に対する確率過程のモデルである。特に粒子のランダムホッピングを非対称にすることにより、ある方向に粒子が流れやすくなり定常状態に緩和した後も粒子流の存在する非平衡系となる。また、体積排除効果によって粒子たちは同じ格子点上には来れないという相互作用を課すことにより本質的に多体問題である（図１を参照)。このモデルは読み替えによってスピン鎖の問題にも還元され、これまでよく知られている厳密に解けるスピン鎖モデルと関連して議論できる特徴もある。

本研究では系を有限サイズ (L とする）に取り、左右両端の境界から粒子の出入りを許す開放系を解析した。今考えている系には、左右からの粒子の出入りのパラメータ４つ (a, b, c, d とする) とホッピングの非対称性を表すパラメータ (q とする) のあわせて５つがあり、これらを全て一般的に取り扱った。この境界系における定常状態は行列を用いた方法によって定常状態を構成することが知られていたが、この行列が Askey-Wilson 多項式という直交多項式と関係しているという数学的事実を発見した。モデルにおける分配関数の定義に関して基礎的な処方箋は未だ存在していないが、確率過程に自然に現れる規格化定数を分配関数として考えると実際にバルク量の母関数になっていることが分かる。これらの結果、分配関数、バルク的な物理量および多点相関関数に関する厳密に成り立つ積分公式を導出することができた。分配関数の積分公式は次のような積分公式となった。

$$Z_L = \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{4\pi \mathrm{i}z} \frac{(z^2, z^{-2}; q)_\infty [(1+z)(1+z^{-1})/(1-q)]^L}{(az, a/z, bz, b/z, cz, c/z, dz, d/z; q)_\infty}。 \tag{1}$$

但し、積分路 C は境界パラメータに依存する。更に系のサイズを大きくする熱力学的極限についてこれらの厳密な積分公式の振舞いを詳細に調べることにより、境界系についての相図を得た。その結果として、左右の粒子の出入りの割合の大小によって系のバルクでの振舞いが決まり、(A) 希薄相、(B) 渋滞相、(C) 最大流量相が現れた (図 2)。また、相関関数の振舞いから熱力学極限での相関長の関数形を明らかにしその分類により新たに小さな相の分類も行った。相関関数の有限サイズ補正の計算も行い、境界、粒子間の複雑な相関を見出した。

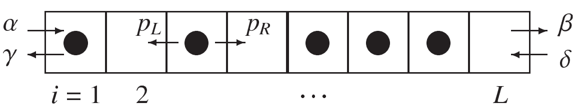

図 1: ASEP の模式図。パラメータ a, c および b, d はそれぞれ α, γ および β, δ と関係し、$q = p_L/p_R < 1$ である。

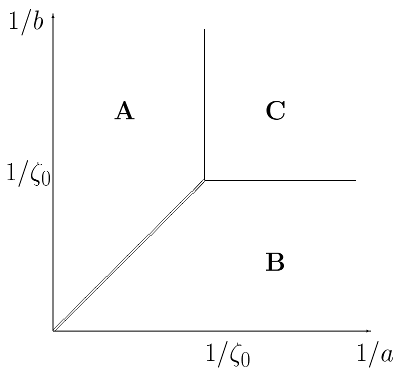

図 2: ASEP の相図。(A) 希薄相、(B) 渋滞相、(C) 最大流量層。$\zeta_0 = 1$ が１種系に対応する。横軸は左端からの流入量、縦軸は右端からの排出量の大きさを表している。２種系でも同じ相図となる。

ASEP には様々な拡張形が考えられているが、本研究では更に２種類粒子のいる境界系を考察した。但し、新しく導入した粒子は境界からの出入りを禁じる条件を課すため系の中で一定量を保っている。パラメータとして新たに第１種粒子、第２種粒子のフガシティー (ξ, ζ' とする) を導入し、１種系と同様のアプローチを採用することにより、定常状態を与える行列が今度は continuous big q-Hermite 多項式と関係していることを見出し、分配関数、バルク量および多点相関関数の厳密表式を得た。分配関数の積分公式は次のようになった。

$$\begin{aligned} Z_L(\xi^2, \zeta') \quad = \quad & \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{4\pi \mathrm{i} z} \frac{(q, \zeta'\xi^{-2}a, \zeta' b, \zeta'\xi^{-2}c, \zeta' d, z^2, z^{-2}; q)_\infty}{(\zeta'\xi^{-1}z, \zeta'\xi^{-1}/z, \xi^{-1}az, \xi^{-1}a/z, \xi bz, \xi b/z, \xi^{-1}cz, \xi^{-1}c/z, \xi dz, \xi d/z; q)_\infty} \\ & \times {}_2\phi_2\left[\left.\begin{matrix} \zeta'\xi^{-1}z, \zeta'\xi^{-1}/z \\ \zeta'\xi^{-2}a, \zeta'\xi^{-2}c \end{matrix}\right| q, \xi^{-2}ac\right] {}_2\phi_2\left[\left.\begin{matrix} \zeta'\xi^{-1}z, \zeta'\xi^{-1}/z \\ \zeta' b, \zeta' d \end{matrix}\right| q, \xi^2 bd\right] \\ & \times [(1+\xi z)(1+\xi z^{-1})]^L (1-q)^{-L}。 \end{aligned} \tag{2}$$

この表式において、$\xi = 1$, $\zeta' = 0$ とおくと式 (1) に還元されるので確かに拡張となっている。更に熱力学的極限を調べることにより、１種系とほぼ似た相図を得た。但し、新しく導入した粒子の存在のため、密度に関して異なる値が出る。

また、ASEP の解析で用いた行列の方法と厳密に解けるモデルの解析における基礎として使われている量子逆散乱法との関係についても議論し、行列積が頂点作用素の言葉で理解できることも示した。量子逆散乱法はモデルを階層的に取り扱う方法であるため、ASEP を含むようなモデルの階層についての新たな知見を示したことになる。

本研究で得られたような非平衡系に対する分配関数の厳密公式は非常に稀であり、物理的にも数学的にも価値が高いものであると言える。

多核成長モデル–漸近的時間発展について

多核成長モデル (略称 PNG) は１次元的な基盤上の界面成長のモデルで、KPZ ユニバーサリティクラスに属する厳密に解析できるモデルとして知られている。界面成長については研究が進んでおり、KPZ ユニバーサリティクラスはスケーリング指数まで解析的に求められている。一般的に相関関数のスケーリング形などの計算は理論的に難問とされているが、ごく最近、PNG の時間一定での空間多点相関の漸近形が厳密に求められた。スケール相関関数を記述する Airy 過程はランダム行列理論やランダム分割といった物理・数学の分野と密接に関わるため特に注目を集めている。

本研究では、系を無限系/半無限系にとり、滴型初期条件での離散型 PNG の時間発展を調べた。この系はマップにより無限系/半無限系 ASEP とも関連している。数学的に解析できるために多層に拡張した PNG を考え組合せ確率論的な側面を駆使することにより、「空間的」時間空間相関関数の厳密表式を新たに見出した。これは時間一定の条件を含むより一般的な結果である。

また、次のような様々な条件下で PNG の長時間 T 経った時の漸近形を調べた。

(I) 無限系において界面の端に $k(= o(T))$ 個の縮退した値を持った外場が加わった場合。
このとき、界面は KPZ スケーリング、ガウシアンスケーリングされる領域に分かれ、それぞれ空間相関関数は Airy 過程、$k \times k$ GUE の相関核を積分核にもつ Fredholm 行列式で表されることを示した。またその境界では中間的な F_k 型と呼ばれる積分核をもつ Fredholm 行列式となった。

(I′) 無限系において界面の端に $k(= O(T))$ 個の縮退した値を持った外場が加わった場合。
このとき、多層の中ほどにカスプが現れその周りの多層に対する相関関数が Pearcey 過程を積分核にもつ Fredholm 行列式で記述されることを示した。

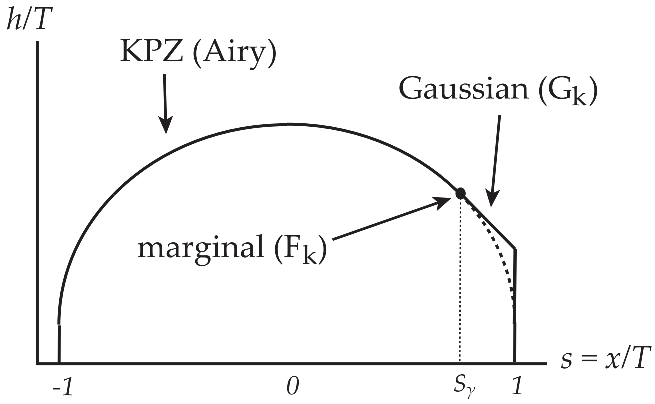

図 3: 無限系 PNG の漸近形。右端にのみ k 個縮退した外場を加えた場合。スケーリング (相関関数を表す積分核) を示した。

(II) 半無限系において原点と界面の端にそれぞれ外場が加わった場合。
このとき、バルク領域は無限系で $k = 1$ とした時と同じ振舞いが見出され、KPZ スケーリング、ガウシアンスケーリングされる領域が現れた。一方、原点付近では GSE 型、ガウシアン (G) 型のゆらぎが現れ、図 5 のような相図を得た。

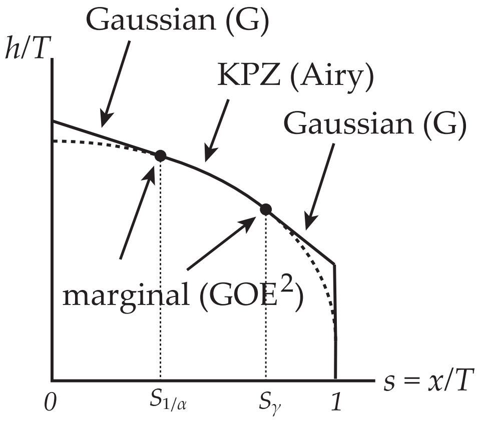

図 4: 半無限系 PNG の漸近形。スケーリング (相関関数を表す積分核) を示した。

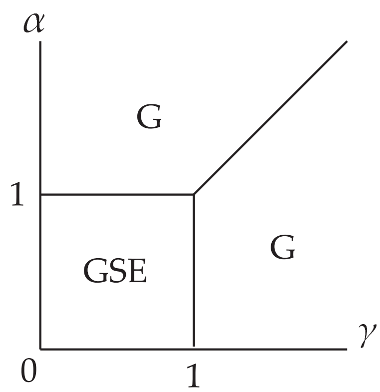

図 5: 半無限系 PNG の原点付近でのゆらぎ・相関関数に関する相図。α は原点での外場、γ は界面右端での外場の大きさを表す。

結論

以上のように、本学位論文では流れのある定常状態および界面成長の漸近的時間発展といった非平衡的な振舞いについてそれぞれ厳密なモデルを解析した。これにより、基本量について物理・数学的に重要な厳密公式をいくつも見出した。