

論文審査の結果の要旨

氏名 内山 優

本論文の主題は1次元の確率過程における非平衡的性質の解析的研究である。平衡系からのずれが摂動的に扱える非平衡系については既に線形応答理論等により系統的な理解が得られている。これに対し、平衡からのずれが著しい系の理論は発展途上であり、様々な研究・理論が試行・模索されているのが現状である。本論文ではミクロな確率過程のモデルから出発し、マクロな物理量の確率分布、揺らぎ、漸近的振る舞い等を導出するという統計力学的なアプローチを展開している。その最大の特徴は厳密に解ける確率過程モデルを扱うことにある。解けるという状況設定のために単純化された1次元の系ではあるが、非自明な相転移があり、平衡統計力学において2次元イジング模型のような規範的模型となる可能性が期待される。またその解析には、直交多項式や可積分系の理論、表現論、組み合わせ論等が駆使されており、ランダム行列理論との関連を呈するなど数理物理的にも意義深い成果を達成している。具体的な対象系としては外場に駆動された体積排除効果を持つ多粒子系（非対称排他過程）の模型と多核生成型の結晶成長の模型の二つがあり、それぞれ論文の2-4章と5-7章で扱われている。

まず2-4章における非対称排他過程の模型に関する主な成果を要約する。1次元の格子の上に、右向きと左向きに相対確率 $1:q$ でホップする粒子の集団を考える。ただし排除効果のために、最隣接サイトが占有されている場合は遷移を禁じ、これにより本質的に多体効果が取り入れられる。また、左右の境界で、排他性を満たしながら一定の確率で粒子の注入、除去をおこなう。これらの確率として2個のパラメーターがあり、左端と右端で独立に設定できるので、境界条件は4個のパラメーター $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ で指定される。遷移確率 q と併せて合計5個のパラメーターが入った模型を解析的に取り扱い定常状態を導くことに成功した。その結果、粒子流、密度などのバルクに関する物理量をはじめ、相関関数についても熱力学的極限における厳密な結果が得られた。それによると粒子流と密度はパラメーター $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ により3つの領域で異なり、境界条件に駆動されて希薄相、渋滞相、最大流相の間に相転移があることが示された。さらに希薄相と渋滞相は、相関長の振る舞いが異なる領域に分かれること、境界の影響で3点相関関数は単調でないことなどを見出した。以上は粒子が一種類の場合であるが、この他に第二種の粒子が介在する拡張模型についても厳密解を得た。

次に5-7章における多核成長模型に関する主な結果を要約する。多核成長模型とは以下のような離散時間・空間上で定義される確率過程である。一次元基板上に確率的にステップが生成される(核生成)。ステップは左右に速さ1で成長する(界面成長)。ステップが衝突する際は、高い方がそのまま成長し、低い方は仮想的に下の相に移る(多層バージョン)。ただし初期時刻では平らな状態から原点にのみ核生成が起こり、以後の核生成はその核が成長した界面上のみに起こるとする。直感的に期待されるように、界面は蒲鉾型の形状に漸近的に近づいていくが、その高さ、左右の揺らぎは時間の $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 乗でスケールするなど(Kardar-Parisi-Zhang ユニバーサリティー)。豊かな振る舞いを呈することが知られていた。論文提出者は、無限系および半無限系において外場を導入し、長時間での相関関数の漸近的振る舞いを解析した。特に、外場の自由度を増やした状況を詳しく調べ、その影響により、漸近界面の一部がKPZと異なる様々なスケーリング則に従うことを見出した。これは

Schur, Pfaffian, Airy, Pearcey といった確率過程の多点相関関数を Fredholm 行列式/パフィアンとして表示し、漸近解析を遂行して得られる結果であり、技術的にも高い水準を達成している。

以下、章ごとにその内容を概説する。第1章では導入として、本論文の主題である非対称排他過程と多核成長模型について概説し、非平衡系の研究全体の中での位置づけ、意義等について述べている。

第2章では非対称排他過程を扱っている。行列積の方法、Askey-Wilson 直交多項式などを要約し、定常状態を厳密に構成した。またバルクの物理量、相図、相関関数などの導出が詳しく記載されている。

第3章では粒子を2種類にした場合の拡張を与えた。この場合、関与する直交多項式は continuous big q -Hermite 多項式であることを初めて見出し、熱力学極限の物理量を導出した。相図自体は定性的には2章のものと同じ結果となっている。

第4章では行列積の方法と可積分系の手法との関連について幾つかの視察、注意が与えられている。

第5章では多核生成模型を導入し、関係する確率過程とその多点相関関数に関する既知の結果を総括している。

第6章では無限系で、境界に k 個の外場を入れた場合の多核成長模型の解析を行った。相関関数は、バルクでは KPZ 的な振る舞いをし、境界近傍では $k \times k$ GUE ランダム行列における相関核のフレドホルム行列式になる。これは $k=1$ の場合の先行結果の拡張になっている。

第7章では半無限系の右端と原点に外場をかけた場合を扱い、バルク領域で KPZ、境界領域でガウス型のスケーリングを示した。

第8章では論文全体の要約と展望が述べられている。

本論文は非平衡系について新しい知見を提供するとともに、技術的にも高い水準の解析的手法を完遂しており、学位論文として十分な内容を持っている。

なお、本論文2章の一部は和達三樹氏、笹本智弘氏との共同研究に基づくものであるが、論文提出者の寄与が十分であると判断する。

以上のことから、博士（理学）の学位を授与できると認める。