論文内容の要旨

Generalized collective quantization of Skyrmion

スカーム模型における集団座標量子化の一般化

永井 雄高

1 はじめに

本研究ではスカーム模型の古典解であるスカーミオンの量子化を扱った．スカーム模型は QCD の低エネルギー有効模型の一つであり，そのソリトン解であるスカーミオンはバリオンに相当する．ただし，厳密にはスカーミオンは静的なものが知られるのみであり，スピンやアイソスピンに対応するべき古典的な回転運動の自由度を持たない．そのため，現実の核子を記述するには，近似的な集団運動を想定し，それを量子化することで必要な量子数を定義する必要がある．アドキンス，ナッピ，ウィッテンによって提唱された従来の集団座標量子化では，ソリトン解の一様な回転を考える．この手法は広く採用されているが，遠心力を変分方程式に取り込んだ際にソリトン解が定義できなくなることが知られている．この欠陥はパイオン質量を導入することで改善できるが，この方法では自然なカイラル極限を考えることができない．本研究ではより一般的な集団運動を扱うことでこの問題を回避し得ることを示した．また，どのような集団運動が現象論的に可能であるかを議論し，遠心力の効果について数値的に調べた．

以下，本論文の構成に沿って概観する．

2 古典的スカーミオン

この節ではスカーム模型の古典的性質について述べた．スカーム模型は非線形な SU(2) 場の理論である．ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \frac{F_\pi^2}{16}\mathrm{tr}(\,\partial_\mu U\,\partial^\mu U^\dagger) + \frac{1}{32e^2}\mathrm{tr}\left[\partial_\mu U U^\dagger,\,\partial_\nu U U^\dagger\right]^2$$

で与えられる．U は SU(2) 場，F_π はパイオン崩壊定数，e は現象論的な結合定数である．スカームは静的ソリトン解としてヘッジホッグ場

$$U_0(\boldsymbol{r}) = \exp(\mathrm{i}F(r)\hat{r}_i\tau_i)$$

を仮定した．ここに F は実関数，τ はパウリ行列を表す．F の境界条件は次のように与えられる

$$F(0) = B\pi, \quad F(\infty) = 0. \quad B \in \mathbb{Z}.$$

B は場 U の空間への巻き付き数であり，物理的にはバリオン数と同一視できる．以下では $B = 1$ の系を考える．ヘッジホッグ場に対する変分方程式は数値的に解かれ，有限エネルギーの解を持つことが知られている．

3 集団座標量子化

この節では広く受け入れられている集団座標量子化の手法と，その既知の問題点についてまとめた．

従来の方法ではヘッジホッグ場 U_0 がラグランジアンの大域的回転対称性を破っていることに注目し，大域的回転の自由度を集団運動の自由度と見なす．これを量子力学的に扱うには，時間に依存する場

$$U(t) = A(t) U_0 A^\dagger(t)$$

を仮定すればよい．ここで A は回転の行列である．ヘッジホッグ場では実空間とアイソスピン空間の角度が対応しているため，行列 A による回転はスピンとアイソスピンの両方に対応する．このときラグランジアンは次の形に帰着する．

$$L[F] = -M_0[F] - \Lambda[F] \mathrm{tr}(\partial_0 A A^\dagger)^2.$$

ただし M_0 と Λ は F を含む積分である．この回転の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ とすれば $\mathrm{i}\omega_i t_i = \partial_0 A A^\dagger$ である．ここでアイソスピン空間における正準運動量 $\boldsymbol{L} = \Lambda \boldsymbol{\omega}$ を定義する．ルジャンドル変換によりハミルトニアン

$$H[F] = \omega_i L_i - L[F] = M_0[F] + \frac{L^2}{2\Lambda[F]}$$

が定義できる．正準量子化の処方に従って運動量 $\boldsymbol{L}$ を演算子に置き換えれば量子化されたハミルトニアン

$$H[F] = M_0[F] + \frac{C}{2\Lambda[F]}$$

を得る．C はカシミール演算子であり，スピン・アイソスピンの表現に対応する定数になる．

この方法には以下のような困難が知られている．ハミルトニアンを変分して $F = 0$ の周りで線形化すると次のような積分微分方程式を得る

$$F'' + \frac{2}{r} F' - \left(\frac{2}{r^2} - \frac{2C}{3\Lambda^2} \right) F = 0.$$

C と Λ が有限の時，F は遠方で $\sin(kr)/r$ のように振動する解を持つが，このとき Λ は発散してしまう．逆に Λ が無限大とすれば F は r^{-2} で減衰する解を持ち，この解に対しては Λ は有限の値を持つ． したがって C がゼロでないとき境界条件を満たす解は存在しない．

パイオン質量 m_π を導入すると, 上の方程式は次のように変更される.

$$F'' + \frac{2}{r}F' - \left(\frac{2}{r^2} - \frac{2C}{3\Lambda^2} + m_\pi^2\right) F = 0.$$

ここでパイオンの有効質量 μ を

$$\mu^2 \equiv m_\pi^2 - \frac{2C}{3\Lambda^2}$$

で定義する. $\mu^2 > 0$ であれば, 方程式は遠方で $\exp(-\mu r)/r$ のように減衰する解を持つ. ただし, この方法で核子とデルタ粒子の質量を再現しようとすると、現実の二倍以上の大きな m_π が必要になることが知られている. また, パイオン質量がゼロとなるカイラル極限において, 核子の振る舞いに特異性を認めなければならない.

4　集団座標の一般化

ここでは集団座標の定義を一般化した. 我々は大域的回転の概念から離れ, 空間座標に依存する揺らぎを考え, その特定のモードを集団運動と見なして量子化を行った.

まず注目するモードを特徴づける関数 $f(r)$ を導入する. ヘッジホッグ場が原点からの距離 r に依存する角速度 $\boldsymbol{\omega}(r) = \boldsymbol{\omega}_0 f(r)$ で微小回転をすると考えると, ラグランジアンは

$$L = -M_0 + \frac{\omega_0^2}{2}\int_0^\infty 4\pi r^2 \mathrm{d}r \lambda(r) f^2(r)$$

のように書ける. 角度変数に共役な正準運動量は次のように定義できる.

$$\boldsymbol{j}(r) = \frac{\delta L}{\delta \boldsymbol{\omega}(r)} = 4\pi r^2 \lambda(r) \boldsymbol{\omega}(r).$$

我々は系の全角運動量

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\omega}_0 \int_0^\infty 4\pi r^2 \mathrm{d}r \lambda(r) f(r)$$

を集団運動量として採用する. 古典的なハミルトニアンは以下のように書ける.

$$H = \int \mathrm{d}r \boldsymbol{\omega}(r) \cdot \boldsymbol{j}(r) - L = M_0 + \frac{1}{\Lambda_{\mathrm{eff}}} J^2.$$

ここに,

$$\Lambda_{\mathrm{eff}} = \frac{\Lambda_1^2}{\Lambda_2}, \quad \Lambda_1 = \int_0^\infty 4\pi r^2 \mathrm{d}r \lambda(r) f(r), \quad \Lambda_2 = \int_0^\infty 4\pi r^2 \mathrm{d}r \lambda(r) f^2(r).$$

従って量子化されたハミルトニアンは

$$H[F] = M_0[F] + \frac{C}{2\Lambda_{\mathrm{eff}}}.$$

ここで $f =$ (定数) とおけば従来の大域的回転に帰着する. このとき, F に対する線形化された方程式は

$$F'' + \left(\frac{2}{r} + 4\zeta'\right) F' - \left(\frac{2}{r^2} - \zeta\right) F = 0$$

となる．ただしここで

$$\zeta \equiv \frac{2C}{3\Lambda_{\mathrm{eff}}^2}(2\gamma f - \gamma^2 f^2), \qquad \gamma \equiv \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$$

と定義した．f が遠方で十分に速く減衰すれば，回転項の寄与を無視できる．そのとき方程式は静的な場合に帰着し，ソリトン解の存在が期待できる．この定式化では f は理論のパラメータとして導入されている．どのようなモードを採るべきかは，現象論的に決定するしかない．

ソリトン解が存在するためには f が r^{-2} よりも速く減衰すればよい。我々は指数関数型

$$f(r) = \exp\left(-\frac{r}{R}\right)$$

およびフェルミ関数型

$$f(r) = \frac{1}{\exp(\frac{r-R}{a}) + 1}$$

を仮定し，いくつかの R と a の値について数値的に解を求めた．

指数関数型ではヘッジホッグ解は安定に存在するものの，核子のモデルとしては望ましい結果が得られなかった．いくつかの物理量に対しては剛体近似よりも良い値を得られるが，F の遠方の振る舞いに敏感な量については実験値からより大きく離れてしまった．この傾向はカイラル極限で顕著である．

回転の効果がより局在するフェルミ関数型では，R と a の値をそれぞれ 1 fm, 0.1 fm 程度に設定することで無理の少ない結果を得ることができた．

上記いずれの場合にも，R の大きい場合には F の遠方の振る舞いが悪くなる．逆に R を極端に小さくとった場合には，Λ_{eff} の値が小さいために，結合定数が現実の値から離れてゆく傾向がある．

5 まとめ

従来，スカーム模型の取り扱いでは，遠心力を無視するか，大きなパイオン質量を導入する必要があった．我々はアドキンスらによって提案された集団座標の自然な拡張を議論した．この定式化では，物理的な解の存在と矛盾しない形で遠心力を取り入れることができ，また自然なカイラル極限を考えることができる．

我々は得られたハミルトニアンについて数値計算を行い，現象論的に無理の少ない結果を得るためには，バリオン半径と同程度の領域のみが回転運動に参加すると仮定する必要があることを見た．このとき，遠心力を考慮したスカーム模型は，一様回転において遠心力を無視した計算に近い結果を与える．アドキンスらの採用したこの近似は，現象論的には正当であったと見ることができる．

スカーム模型の定量的な性質は，量子効果や古典場の変形等を取り込むことで大きく変化することが知られている．ここで得た数値的な結果はもっとも単純な場合の例にすぎない．ただし，我々の定式化は模型の詳細に依存しないため，上記のような拡張を考えた場合にも有効である．