論文内容の要旨

論文題目: Noncommutative Quantization for Noncommutative Field Theory (非可換場の理論における非可換的量子化)

氏名 安部保海

非可換空間上の場の理論は近年非常に注目を集めており、現在も盛んに研究が行われている研究分野である。非可換空間とは一種の空間の拡張概念であり、その座標関数が非可換な交換関係に従うという事実で特徴付けられる：

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu} \tag{1}$$

ここで $\theta^{\mu\nu}$ は実反対称テンソルである。このような空間上の場の理論、特に場の量子論は、通常 Moyal スター積と呼ばれる非可換な積

$$f(x) * g(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial'_\mu\partial''_\nu\right) f(x')g(x'')\Big|_{x',x''\to x} \tag{2}$$

を用いることで定式化される。非可換場の理論の作用は、対応する可換場の理論の作用に現れる場同士の積をこの Moyal スター積で置き換える事で得られ、例えば ϕ^4 理論の作用は次の形で与えられる。

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left[\frac{1}{2}\Big((\partial_\mu\phi) * (\partial^\mu\phi) - m^2\phi * \phi\Big) + \frac{\lambda}{4!}\phi * \phi * \phi * \phi\right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{1}{2}\Big((\partial_\mu\phi)^2 - m^2\phi^2\Big) + \frac{\lambda}{4!}\phi * \phi * \phi * \phi\right] \end{aligned} \tag{3}$$

ここで重要なことは、場の２次の項に関してはスター積と通常の積との間の差が全微分で与えられるため、積分によりその差が落ちてしまうことにある。

この様に構成された作用に基づいて定義された場に対し、通常、量子化は可換場の理論と同様、正準量子化、もしくは経路積分によって行われる。特に時間と空間が可換な場合 ($\theta^{0i} = 0$)、場の正準共役量は

$$\pi(x) = \frac{\delta S}{\delta\phi(x)} = \dot\phi(x) \tag{4}$$

と見慣れた形で与えられ、これらに対し正準交換関係

$$
\begin{aligned}
&[\phi(t,\boldsymbol{x}),\pi(t,\boldsymbol{y})]=i\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
&[\phi(t,\boldsymbol{x}),\phi(t,\boldsymbol{y})]=[\pi(t,\boldsymbol{x}),\pi(t.\boldsymbol{y})]=0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

を課す事で、量子化が行われる。

このように非可換場の理論においても、量子化は通常の可換場の理論と全く同じ手続きで行われるが、そこには可能な量子化がその方法しかないという積極的な理由があるわけではない。量子化に際して、正準量子化（もしくは経路積分法）が用いられる基本的な理由は、低エネルギーにおいてこの量子化が自然を正確に記述しているためであると考えられる。しかし、これはさらなる高エネルギー領域において、通常とは異なる量子化が実現している可能性を否定するものではない。特に、非可換場の理論においては、理論に新たな基本パラメータとして非可換パラメータ $\theta^{\mu\nu}$ が含まれているので、この $\theta^{\mu\nu}$ に陽に依存するような量子化法を考えることができるかもしれない。このような視点から、著者は非可換パラメータ $\theta^{\mu\nu}$ に依存し、可換極限 $\theta^{\mu\nu}\to 0$ で正準量子化に帰着するような、新しい量子化を提案した。

この新しい量子化は、異なる点上の関数同士にも拡張されたスター積

$$
f(x)\star g(y)=\exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^x\partial_\nu^y\right)f(x)g(y)
\tag{6}
$$

を利用し、正準交換関係 (5) を次の交換関係

$$
\begin{aligned}
&[\phi(t,\boldsymbol{x}),\pi(t,\boldsymbol{y})]_\star=\phi(t,\boldsymbol{x})\star\pi(t,\boldsymbol{y})-\pi(t,\boldsymbol{y})\star\phi(t,\boldsymbol{x})=i\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
&[\phi(t,\boldsymbol{x}),\phi(t,\boldsymbol{y})]_\star=[\pi(t,\boldsymbol{x}),\pi(t,\boldsymbol{y})]_\star=0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

に置き換えることで与えられる。この量子化の面白いところは、交換関係をこのように置き換えて理論を構築しても、通常と同じように量子論を矛盾無く構築できることにある。特に、スター積を用いた時間順序積

$$
T_\star\{\phi(x)\phi(y)\}=\begin{cases}\phi(x)\star\phi(y), & \text{when } x^0>y^0,\\ \phi(y)\star\phi(x), & \text{when } y^0>x^0.\end{cases}
\tag{8}
$$

を用い、新たな量子化に適した Green 関数を

$$
G_\star(x_1,\cdots,x_n)=\langle 0|T_\star\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\}|0\rangle
\tag{9}
$$

の形で導入すると、この値を求めるための手法、つまり摂動展開や Wick の定理の対応物をこの場合にも議論することができ、通常と同じ意味においてその値を決定することができる。さらに、Green 関数と S 行列要素間の関係を示す LSZ 還元公式も同様に示すことができ、Green 関数同様、S 行列も摂動的に計算可能であることがわかる。

驚くべきことに、その結果得られる Green 関数、もしくは S 行列要素の値は、可換場を正準量子化した理論（つまり通常の可換場の量子論）と全く同じ値になる。つまり、非可換場の作用から出発し、新たな量子化 (7) で量子化を行った理論は、作用に非可換な相互作用項を持つにもかかわらず、量子論としては可換場の理論と同じダイナミクスを示すのである。その仕組みを摂動計算の過程において観察すると、この事態は相互作用項に含まれる非可換性と、量子化の際に導入された非可換性が打ち消しあうことによって起きていることが分かる。この事は相互作用項に用いたスター積と量子化の際に用いたスター積とで異なる非可換パラメータを使うことで確認できる。実際、前者を θ^{ij}、後者を $\tilde{\theta}^{ij}$ として、理論を構成すると、その結果得られるダイナミクスは、$\Theta^{ij} = \theta^{ij} - \tilde{\theta}^{ij}$ を非可換パラメータとして持つ通常の非可換場の量子論と等価なものになるのである。

さらに、この等価性が摂動論に限られるものではないがいえる。つまり、非可換場の理論を (7) で量子化した理論と、可換場の理論を正準量子化により量子化した理論との間にはマップを構成することができ、このマップの下で二つの理論が非摂動的にも等価である事を示すことが出来る。このマップによる二つの理論の等価性から、さらに理論の対称性についても面白いことがわかる。通常の可換場の量子論は Poincaré 対称性を有しているが、著者が導入した新たな量子論ではこの対称性は破れている。むしろこの対称性は、新たな量子論においては twisted Poincaré 対称性として実現されていることが、このマップを通じて明らかにされる。twisted Poincaré 対称性は、Poincaré 代数を Drinfel'd twist によって変形することで得られる量子群的対称性であり、非可換空間の対称性を記述する概念として近年非常に注目を集めている。

以上に見たように、著者が導入した量子化法にもとづく量子論はいくつかの興味深い特徴を備えていた。なによりもまず、この方法によって矛盾のない量子論が構成でき観測可能な量を確定できるという事実は、スタンダードな正準量子化が物理的に唯一可能な量子化法ではないということを示唆している。また新しく構成された量子論に見出された非可換性の打ち消しあいの仕組みからは、例えば可換場の理論の作用から出発し、新しい量子化により場を量子化することにより、通常の非可換場の量子論と等価な理論が得られること、つまり理論の非可換性を、古典的な作用ではなく量子化の段階で理論に導入することも可能であることがわかる。さらに、新しく構成された理論は twisted Poincaré 対称性を有しており、量子群と物理の接点としての観点からも、興味深い例を提示していると考えられる。これら明らかにされた構造、特徴のさらなる研究、応用が今後の課題である。