

論文内容の要旨

論文題目 Exact Analysis of One-Dimensional δ -Function Gases at Zero Temperature

(1次元デルタ関数気体の厳密な解析)

氏名 飯田 俊朗

本研究は、2成分の1次元デルタ関数気体を対象とし、ベーテ仮説法を用いた厳密解に基づく解析を行った。学位論文では、研究の背景とベーテ仮説法を導入した後、ベーテ仮説法により厳密解を求めることのできる3つの模型について、その解を明示的に計算し、物理的意義を明らかにした。

研究の背景

量子力学の誕生からわずか数年ののち、ベーテ (1931) は最近接相互作用する2成分スピンの模型である1次元ハイゼンベルク模型の固有状態を計算した。この計算方法の本質は、 N 個 (N は非常に大きい) のスピンを記述するハミルトニアンのエネルギースペクトルを計算することが、 N 個の代数方程式を解くことに帰着された点である。この方法と方程式とは、現在ではそれぞれ、ベーテ仮説法、ベーテ方程式と呼ばれている。もっとも、この連立方程式を直接解くことは、現実的には、非常に難しい。ハルテン (1938) は熱力学的極限、すなわち、粒子数 N と系の大きさ L を無限大、ただしその比である密度 N/L は一定に保つ、という極限のもとで、ベーテ方程式の解を記述する変数が稠密に分布するとして、その分布関数のみたすべき積分方程式を提案し、基底状態のエネルギーの算出に成功した。

ほぼ30年間にわたる空白の後、リーブとリニガー (1963) とが1次元デルタ関数ボース気体へ適用することにより、ベーテ仮説法は新たな息吹を与えられた。デルタ関数気体とは、相互作用がデルタ関数型の2体間ポテンシャルで与えられる量子気体である。これを契機とし、ヤン (1967) とゴードン (1967) による内部自由度のある系への拡張 (一般化されたベーテ仮説法)、ヤン (1969) による有限温度への拡張 (熱的ベーテ仮説法)、がいずれもデルタ関数気体を研究対象としてなされた。さらに、サザーランド (1968) と高橋 (1970) は、一般化されたベーテ仮説法を用いて、任意の内部自由度をもつデルタ関数気体の固有状態が実際に計算できることを示した。

これらの定式化を経て、ベーテ仮説法は異方性ハイゼンベルク模型 (X X Z 模型), ハバード模型, 近藤模型をはじめとする, 様々な模型の厳密解を求めることを可能にし, それらの物理的性質を明らかにする上で大きな役割を果たした。

その一方で, 最も基本的なデルタ関数気体そのものを対象とする研究は, 1970年代の半ばをもって行われなくなった。デルタ関数気体のハミルトニアンが記述する物理系は, 現実にはあまり存在していなかったことも一因である。ベーテ方程式と, その熱力学極限である積分方程式は求められたものの, それを用いた模型の性質の解明まで踏み込んだ研究は, ほとんどなされることがなかった。

しかしながら, ボース・アインシュタイン凝縮 (BEC) の実現 (1995) 以降, 爆発的に進展を続けている超低温アルカリ原子気体の一連の実験が, デルタ関数気体への新たな興味を呼び起こすこととなった。かつて, 数理論理学者の好んで用いた「模型」は, 現在では, 冷却原子の極低温・擬1次元的な閉じ込め条件下における実効的なハミルトニアンとして, 活発に研究されている。

基礎理論

本研究の基礎となるベーテ仮説法は, 2成分のデルタ関数フェルミ気体に対するヤン (1967) とゴードン (1967) の研究にその源を発する。ボース・フェルミ混合気体への適用にあたっては, サザーランド (1968) の3成分以上の系への拡張も必要となる。それらの手法に忠実に, 2成分のデルタ関数気体のベーテ方程式を導出にいたる過程を解説した。

スピン-1/2 引カフェルミ気体

スピン-1/2 引カフェルミ気体の温度 $T = 0$ における基底状態は実数の擬運動量 k の分布関数 $\rho(k)$ とスピン波のラピディティ Λ の分布関数 $\sigma(\Lambda)$ で特徴づけられ, これらの関数は以下のゴードン積分方程式に従う。

$$2\pi\sigma(\Lambda) - \int_{-B}^B \frac{2c\sigma(\Lambda') d\Lambda'}{c^2 + (\Lambda - \Lambda')^2} = 2 + \int_{-Q}^Q \frac{4c\rho(k) dk}{c^2 + 4(k - \Lambda)^2},$$

$$2\pi\rho(k) - \int_{-B}^B \frac{4c\sigma(\Lambda) d\Lambda}{c^2 + 4(k - \Lambda)^2} = 1.$$

ここで, $c < 0$ は2体間デルタ関数相互作用の結合定数である。粒子数は $\rho(k)$ と $\sigma(\Lambda)$ に対する規格化条件から定まり, これらの分布関数からエネルギーを計算することが可能である。

全スピンの任意の場合に対して, 我々は, 級数展開法を用いて, ゴードン積分方程式の解 $\sigma(\Lambda)$ と $\rho(k)$ とを計算した。引力の下では, $\sigma(\Lambda)$ はスピン1重項に対応する虚数の擬運動量のペア, $k = \Lambda + ic/2$ と $k' = \Lambda - ic/2$ の実部 Λ の分布と解釈することができるため, $2\sigma(\Lambda)$ がペアの擬運動量の分布関数になる。一方, $\rho(k)$ はペアを形成しない, 実数の擬運動量分布関数である。すべての物理量は最終的に, 無次元化した結合定数 $\gamma \equiv 2mc/(\hbar^2 D)$ とスピン偏極 $P \equiv (N_{\uparrow} - N_{\downarrow})/(N_{\uparrow} + N_{\downarrow})$, 数密度 $D \equiv N/L$ の3つのパラメータを用いて整理できた。ここで, m は粒子の質量, \hbar はプランク定数, $N_{\uparrow, \downarrow}$ はスピン $\sigma = \uparrow, \downarrow$ をもつ粒子の数 ($N_{\uparrow} + N_{\downarrow} = N$) である。 $\hbar = 2m = 1$ となる単位を採用し, 対称性より, $0 \leq P \leq 1$ とした。

全スピンの $0 (P = 0)$ の場合, ゴードン積分方程式は, 上の式で $Q = 0$ とおいて得られる, $\sigma(\Lambda)$ に対するただ1つのものになる。我々は, この場合を仔細に検討した。その結果, この模型が, 相互作用が弱いときはスピン1重項の対 (ペア), 強いときは強固に結合した2粒子からなる「分子」として振る舞い, ボース粒子の性質を獲得することを確認した。すなわち, フェルミ粒子のクーパー対からボース粒子へのBCS-BECクロスオーバーを, 1次元において定量的に記述していることが結論づけられた。

全スピンの任意の場合 ($0 \leq P \leq 1$) の結果を図1に示す。(a), (b)とも, 大きい値をとる方 (上方にあるグラフ) が $4\pi\sigma(\Lambda)$, 小さい値をとる方が $2\pi\rho(k)$ である (係数 2π は値を視やすくするためのもの)。

相互作用の強い場合 (a) においては、ペアとペアでない擬運動量とが同じ Λ と k とに対して共存している、すなわち分布関数が値をもつものに対して、相互作用の弱い場合 (b) においては、ペアの擬運動量が原点付近に存在する一方で、ペアでない擬運動量はその周辺にのみ存在する。これは、同じ k を2個以上の同種粒子が同時にとることができない、というパウリの排他原理のためと解釈される。それとは対照的に、相互作用が強い場合 (a) はペアの「分子」とペアでないフェルミ粒子とはあたかも別の種類の粒子のように振る舞うために、分布関数が原点周辺に共存できるのである。これらの性質はおのおの全ての P において確認できるため、全スピン 0 ($P = 0$) において確認できた BCS-BEC クロスオーバーの描像は、スピン 1 重項に対しては、全てのスピン偏極に対して成立しているといえる。

エネルギーの計算結果を図 2 に示す。強い相互作用における表式は $|\gamma| > 3.5$ 、弱い相互作用の表式は $|\gamma| < 2$ において、数値計算の結果と極めて良く一致する。2つの展開を併せると、パラメーター (γ, P) に関し、 $0 \leq |\gamma| \leq \infty$, $0 \leq P \leq 1$ の、ほぼすべての領域を覆うことができる一方、 $2 \lesssim |\gamma| \lesssim 3.5$ がクロスオーバー領域に相当していることも明らかになった。

$|c|$ が小さい場合、すなわち相互作用が弱い場合は、古くから難問として知られている。計算過程では自明ではない展開や、数多くの公式が必要であった。 $P = 0$ の場合、多くの形式的な発散級数が現れ、それらを正しく取り扱うことは難しい。しかし、 $P > 0$ の場合には式の複雑さは著しく増すものの、この問題についてはある程度解消し、正しい結果を導くことができた。条件収束する級数において、有限の P が項の順序を指定する役割を果たすためと解釈できる。

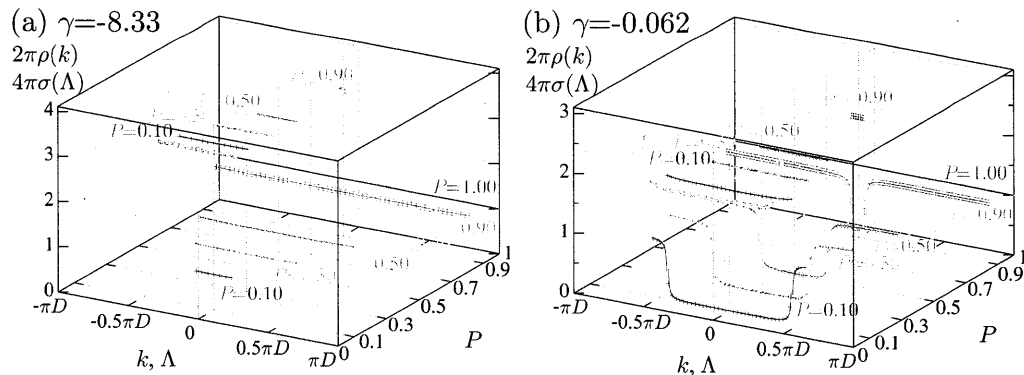


図 1: いくつかの spin 偏極 $P \equiv (N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) / (N_{\uparrow} + N_{\downarrow})$ と実数の擬運動量 k , あるいは虚数の擬運動量の実部 Λ に対する、ゴードン積分方程式の規格化した解 $2\pi\rho(k)$ と $4\pi\sigma(\Lambda)$ のプロット。(a) 相互作用の強い場合 ($\gamma = -8.33$), (b) 相互作用の弱い場合 ($\gamma = -0.062$); 実線は解析的な計算結果, 点は数値計算の結果を示す。

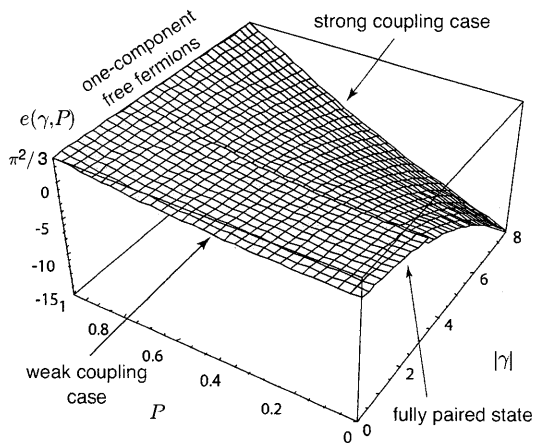


図 2: 規格化した基底状態のエネルギー $e(\gamma, P) = E / (D^3 L)$ の $|\gamma| = -c/D$ と $P = (N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) / (N_{\uparrow} + N_{\downarrow})$ に対するプロット: $|\gamma| < 3$ では弱い相互作用の場合の表式, $|\gamma| > 3$ では強い相互作用の場合の表式を示す。2つの曲面はほぼ滑らかにつながり、数値計算の結果ともよく一致する (図には示さず)。 $\gamma = 0$ は 2 成分自由フェルミ気体に対応する。 $P = 1$ は 1 成分フェルミ気体であり、全ての $|\gamma|$ に対して $e(\gamma, 1) = \pi^2/3$ である。

スピン-1/2 斥力フェルミ気体

引力相互作用と斥力相互作用の場合とでは、ベーテ方程式までは同一であるが、熱力学極限を考えたときにその解の分布関数が従う積分方程式（ヤン積分方程式）は異なる。引力の場合とほぼ同様の手法を用いて、解析を行った。系を特徴づけるパラメータとしては、やはり γ , P , D を用いた。

相互作用弱い場合 (γ 小) は、引力の場合と連続する解を得た。相互作用は斥力でペアは形成されないものの、それに相当する特徴的な台形状の分布が原点周辺に現れる。さらに、相互作用の消える点、 $\gamma = 0$ において物理量は連続であり、エネルギーの $\gamma = 0$ からの展開式は、 γ の 2 次の範囲で完全に一致した。すなわち、 $\gamma = 0$ のまわりで積分方程式は異なるにもかかわらず、エネルギーは解析的である。

強い相互作用の場合 (γ 大) は、2 成分フェルミ気体の他の場合のように、全ての P , $0 \leq P \leq 1$ で成り立つような物理量の表式を求めることは、非常に困難である。可能であると思われるのは、1 成分フェルミ気体に相当する、 $P = 1$ からの展開である。しかし、我々の手法では、展開パラメータ $1/\gamma$ の 1 次の補正までしか信頼に足る結果は得られない。1 次元における強い斥力相互作用は粒子をその統計性によらず「フェルミ的」にし、 $\gamma = +\infty$ は P の値に関わらず 1 成分フェルミ気体に対応する。つまり、この極限では、 γ と P とが似通った役割を担うために正しいパラメータとして機能しないことが、困難さを生じさせていることが判明した。

ボース・フェルミ混合気体

最後に、スピンをもたないボース粒子とフェルミ粒子との混合気体の解析を行った。ボース粒子の割合を表すパラメータ $\alpha \equiv N_b/N$ (N_b はボース粒子の数) を導入し、 γ , α , D の 3 つのパラメータを用いて系を記述した。 $\alpha = 0$ は 1 成分フェルミ気体、 $\alpha = 1$ は 1 成分デルタ関数斥力ボース気体に対応し、いずれもその性質はよく調べられている。これらの極限への移行を念頭に置き、系を特徴づける 2 つの分布関数に対する積分方程式（サザーランド積分方程式）の解を、2 成分フェルミ気体と同様に調べた。

相互作用が弱い場合 (γ 小)、擬運動量の分布関数は原点付近に集中する、ボース粒子のそれと思われる半円状の分布と、より広範囲にわたるフェルミ粒子の一様分布とを単純に足し合わせたような形状になる。それに応じエネルギーは、1 成分斥力ボース気体、1 成分フェルミ気体にそれぞれの極限 $\alpha \nearrow 1$, $\alpha \searrow 0$ で対応する項と、いずれの極限においても 0 になるボース粒子とフェルミ粒子との相互作用に由来する 3 つの項の和で与えられる。この領域では、平均場的な取り扱いも可能であることを強く示唆している。

相互作用が強い場合 (γ 大)、擬運動量は一様分布に近づく。強い斥力相互作用がボース粒子をフェルミ的にすることを実証するものであるが、その一方で、エネルギーは、1 成分フェルミ気体のそれに近づくものの、 $\gamma < +\infty$ である限り、つねに γ と α とに関して解析的な表式をもち、我々は $1/\gamma$ の 4 次の補正まで求めることに成功した。さらにその式は $\alpha = 0$ と $\alpha = 1$ の極限とを正確に再現する。これは 2 成分斥力フェルミ気体における状況と対照をなす。斥力ボース気体が $\gamma \rightarrow +\infty$ の極限でスピンなしのフェルミ気体のように振る舞うことはかねてよりジラルド (1960) らにより指摘されてきた。実際には、 γ が有限である限り、ボース統計性の痕跡を保持する。我々が 1 成分斥力ボース気体で検証し、上述の全スピン 0 のスピン-1/2 引力フェルミ気体との対応においても重要な役割を果たした議論を、重ねて補強するものである。

結論

以上のように、本学位論文では、ベーテ仮説法によって求められた積分方程式に対して、3 種類の 2 成分デルタ関数気体の厳密解を明示的に計算した。いずれも、本研究が初めての成果である。その結果、BCS-BEC クロスオーバー理論をはじめとする他の理論との整合性や、デルタ関数気体に対するベーテ仮説法それ自体における理論の首尾一貫性について、多くの新しい知見を得た。