論文の内容の要旨

論文題目：Exact Study of Correlation Functions
for Spin-1/2 Heisenberg Chain

（スピン-1/2 ハイゼンベルク鎖の相関関数の厳密な研究）

氏名　佐藤　純

理論物理学に現れる様々な模型において、物理量を厳密に計算することは一般には不可能である。ところが、一次元系においてはいくつかの厳密に解ける模型が存在する。それらの模型における厳密解は、他の近似的な手法の試金石として重要な役割を果たす。また、そのような実用的な意味を超えて、「厳密に解ける」ということ自体が深い数学的な起源を持っており、多くの研究者を魅了している。

スピン-1/2 ハイゼンベルク鎖は、一次元可解格子模型における最も基本的な模型である。この模型はベーテ仮説法によって厳密に解くことができ、固有ベクトルと固有値が厳密にこの方法によって求められる。熱力学極限におけるたくさんの物理量、例えば、比熱、帯磁率、素励起などが有限温度においてでさえも、ベーテ仮説法によって厳密に計算されてきた。

ところが、相関関数の厳密計算に関しては、絶対零度における静的な相関関数という一番簡単な場合に限っても、未だに難しい問題として残されている。実際、2 点相関関数に関しては、第一近接相関関数がフルテンによって 1938 年に、第二近接相関関数が高橋によって 1977 年に計算されたのみであり、それらの結果だけしか長年知られていなかった。しかしながら、最近になって、相関関数の厳密計算に関して急速な進展があった。ボースとコレピンは、EFP と呼ばれる特殊な相関関数について詳しく調べた。EFP は $P(n)$と書かれ、これは n サイトにわたってスピンが全て上を向いている確率を表している。EFP に関しては、ボース、コレピン、スミルノフによって 2003 年に $P(7)$までの解析的な表示が得られた。2 点相関関数に関しては、彼らの方法を他の一般の相関関数に適用することによって、第三近接相関関数が堺、城石、西山、高橋によって 2003 年に、第四近接相関関数がボース、城石、高橋によって 2005 年に計算された。この学位論文において、相関関数の厳密計算に関するさらなる結果を報告する。

第一章では、XXZ 鎖のハミルトニアンの固有状態がベーテ仮説法によってどのように構成されるかを示す。まず、座標ベーテ仮説法の枠組みでベーテ仮説方程式を導出する。ベーテ固有状態は、このベーテ仮説方程式の解によって表される。続けて、代数的ベーテ仮説法を概観する。ここで、同じベーテ仮説方程式が代数的に再導出される。さらに、模型を非一様な模型へと拡張することを考える。これは後の章において相関関数を計算するときに必要である。そして、ベーテ仮説法によって、反強磁性基底状態を構成し、有限系の基底状態に対応するベーテ仮説方程式を実際に解く。最後に、熱力学極限におけるベーテ仮説方程式を解析することによって、無限系における基底状態を構成する。

第二章では、qKZ 方程式から、非一様な XXX 模型の相関関数が満たすべき関数方程式を導く。神保、三木、三輪、中屋敷は、量子アフィン代数の表現論の枠組みで XXZ 模型の相関関数を研究した。そこでは、相関関数は頂点作用素の対角和関数で記述される。一方、qKZ 方程式は、量子アフィン代数の頂点作用素の積の行列要素が満たす線形差分方程式系である。古典極限において qKZ 方程式は、WZW 模型に対応するリーマン球面上の共形場理論のn点相関関数が満たす微分方程式系である。つまり、XXZ 模型の相関関数は qKZ 方程式を満たすのである。この事実から、相関関数が満たすべき関数方程式を導くことができる。さらに、一般的な相関関数の関数形を陽に書き下す。

第三章では、ボース、コレピン、スミルノフによって発展させられた代数的な方法によって、EFP を具体的に評価する。EFP はそれ自体で閉じた関数方程式系を満たすことが示される。これによって、他の密度行列要素を評価することなく EFP を得ることが可能になる。さらに、EFP は非一様変数の入れ替えに関して不変であるという対称性を持っており、このことによって効率的に計算することができる。ここでは、この方法によって得られた新しい結果 $P(7)$と $P(8)$を示す。

第四章では、2 点相関関数を計算する新たな効率的な方法を提示する。その鍵となるのが 2 点相関関数の生成母関数である。まず、生成母関数が満たすべき関数方程式を導き、具体的な計算を詳細にわたって示す。この方法における最も重要な利点は、生成母関数が EFP と同じく非一様変数の入れ替えに関する対称性を持っていることである。この事実によって 2 点相関関数を得るための面倒な計算量が大幅に減るのである。実際この方法によって、一度に三つの新たな相関関数、第五、第六、第七近接相関関数を得ることに成功した。

第五章において、密度行列の非対角要素も含む全ての 6 サイト間の相関関数に関する結果を報告する。この結果を用いて、対掌相関関数、二量体相関関数などの相関関数を評価した。さらに 6 サイトまでの密度行列の全ての固有値を計算し、その固有値分布を調べた。

そして、その最小固有値が EFP：$P(n)$となっており、それが$(n+1)$-重縮退していることがわかった。また、これらの結果から、エンタングルメントエントロピーの厳密値を得た。これが共形場理論から導かれる漸近公式とよく一致することを見た。

すでに述べたように、この学位論文において新たに以下の XXX 模型の相関関数の解析的な表示を得た。

・EFP　$n=7, 8$
・2 点相関関数　$n=6, 7, 8$
・全ての密度行列要素　$n=6$

これらがこの学位論文の成果である。