

論文審査の結果の要旨

氏名 佐藤 純

古典力学における三体問題の研究以来認識されているように、相互作用する多体系は一般に厳密に解くことができない。しかし、無限の自由度を持ち相互作用する量子多体系である $S=1/2$ Heisenberg スピン鎖に厳密解が存在することが Bethe によって 1931 年に見出された。しかし、このモデルについても相関関数の計算は未だ困難な問題として残されている。佐藤純提出の学位請求論文では、新たな手法の開発により、スピン相関関数については過去の最高記録である第四近接スピン間から一気に 3 サイト更新し、第七近接スピン間までの相関関数の厳密解を得た。また、6 サイトの区間上で定義される任意の相関関数について厳密な表式も得ることに成功した。

本論文は、英文で 5 章からなる。第一章では、Bethe 仮設法による厳密な基底状態の構成についてレビューを行っている。第二章では、非一様なパラメータを導入した Heisenberg 鎖の可解な一般化において、任意の相関関数が quantum Knizhnik-Zamolodochikov (qKZ) 方程式から導かれる関数関係式によって決定されると言う Boos 等による手法を導入している。この手法が、本論文の基礎となっている。

第三章では、Emptiness Formation Probability (EFP) を考察している。これは、 n 個の連続するサイトが同時にスピン上向きとなる確率に対応する量である。第二章で導入した qKZ 方程式に基づく手法では、密度行列の単一要素についての閉じた関数関係式のみによって決定することができるので、他の相関関数に比して計算が最も簡単である。この手法によって、2003 年に Boos, Korepin, Smirnov は第五近接スピン間 (連続する 6 個のサイト) までの EFP を厳密に求めている。本論文では、計算をさらに推進し、第六、第七近接スピン間 (連続する 7 個、8 個のサイト) までの EFP を厳密に求めることに成功した。EFP については、その多重積分表示より長い区間の極限での漸近形が求められており、サイト数のガウス型関数として急速に減衰することが予想されていた。近距離でも EFP の値は非常に小さくなり数値計算で EFP を精度よく求めることは困難であるため、今まで漸近形の定量的検証はできていなかった。本論文の成果により、連続する 8 個のサイトまでの EFP の厳密な値が得られ、この範囲で既に漸近形がかなり良い近似となっていることが確認された。

第四章では、最も良く議論される相関関数である、スピンの 2 点相関関数の厳密な評価を行っている。第二章で導入した qKZ 方程式に基づく手法を用いて、基底状態から構成される有限区間上の縮約密度行列の全ての要素を求めればスピン 2 点相関関数を厳密に求めることができる。しかし、この方法では計算の手間が膨大になり、第四近接スピン間までしか求められていなかった。著者らは、この困難な計算を遂行することで、第五近接スピン間の 2 点相関関数の厳密評価に成功した。さらに、本論文では生成母関数を用いて評価する要素を大幅に減らす手法を開発し、第六、第七近接スピン間の 2 点相関関数の厳密計算にも成功した。1931 年の Bethe 仮設の発表以来、2003 年の第四近接スピン間の 2 点相関関数の厳密評価までに 70 年以上かかっていることを考えると、本論文の成果はめざましいものと言える。また、スピンの 2 点相関関数は場の理論によっても精力的に研究されており、遠距離での漸近形が求められている。本論文の成果により、第七近接スピン間の 2 点相関関数は既に漸近形と良く一致することがわかった。

第五章では、縮約密度行列の全ての要素を求めると言う方法に立ち返り、第五近接スピン間（連続する 6 個のサイト上）で定義される全ての相関関数を厳密に評価している。これには、ベクトルカイラル秩序の相関関数など、物理的に興味深い相関関数も含まれる。特に、縮約密度行列の全ての要素を求めたことにより、量子エンタングルメントの指標として最近注目されている、有限区間の von Neumann エントロピーの厳密評価にも成功した。この von Neumann エントロピーに関しても場の理論により大きな区間での漸近形が求められているが、第五近接スピン間までの結果で既にこの漸近形と良く一致することがわかった。

以上のように、本論文では近年の数理的手法の発展に立脚し、またこれを発展させることにより、計算の困難な相関関数について既存の記録を大幅に更新する新しい結果を得た。本論文での成果は漸近形の検証や数値計算のベンチマークとしても有用であり、物理学に対する貢献として高く評価される。従って、学位論文として十分な水準にあり博士（理学）の学位授与に値するものであると、審査員が全員一致で判定した。なお、本論文の内容の大部分は、城石正弘氏や高橋實氏との共著として *Journal of Physics A* 誌、*Nuclear Physics B* 誌、*Journal of Statistical Mechanics* 誌に出版済または出版予定であるが、論文提出者はこれらの論文の第一著者として主体的に計算および結果の考察を行ったものであり、論文提出者の寄与が十分であると判断される。また、この件に関して城石氏と高橋氏の同意承諾書が提出されている。