論文の内容の要旨

論文題目：
On Integrable Nonlinear Delay Equations
(遅れ型非線形可積分方程式について)

氏名：土谷　洋平

1　研究の動機，意義付け

本論文は非局所的なソリトン方程式のKP階層から見た特徴づけに関する総説である．また，追従モデルと呼ばれる交通流モデルに関する結果も附録として最後に付けてある．

非局所的とはこの場合特異積分変換

$$T[f](x) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\delta}\coth[\frac{\pi}{2\delta}(y-x)]f(y)dy$$

の項を持つという意味である．ただしδは正の定数である．非局所的な方程式は，虚数方向の空間遅れの項をもつ偏微分方程式に書き直して考えるのが常である．また追従モデルも時間遅れの項を持つ非線形発展方程式である．よって本論文は遅れを持つ非線形偏微分方程式に関するものである．実際のところ，本研究は主に次の2点を問題意識として行われている．

(1) 遅れを持つ非線形微分方程式に対してKP階層の理論のような代数的な枠組みがどれほど適用可能か．

(2) 可積分系の方法を用いて遅れ型非線形微分方程式の特殊解を見つけたい．

2　結果

主な結果を以下に列挙する．

1. 佐藤理論に基づいて非局所非線形 Schrödinger 方程式（INLS 方程式）

$$iu_t = u_{xx} - u(i+T)(|u|^2)_x \tag{1}$$

の Plemelj 形式

$$\begin{cases} iu_t = u_{xx} - 2uw_x^+, & -iv_t = v_{xx} - 2vw_x^-, \\ w^- - w^+ = i\sigma uv, & w^+(x+2i\delta) = w^-(x), \end{cases} \tag{2}$$

を最低次に持つ階層を構成した．

変数 $y, z^{(\mu)}, t_1^{(\mu)}, t_2^{(\mu)}, \cdots$ $(\mu = 1, 2)$ のベクトル値関数 $\vec{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ に対して線形常微分方程式

$$\boldsymbol{P}\partial_y^n \vec{f} := \partial_y^n \vec{f} + \boldsymbol{W}^{(1)}\partial_y^{n-1}\vec{f} + \boldsymbol{W}^{(2)}\partial_y^{n-2}\vec{f} + \cdots + \boldsymbol{W}^{(n)}\vec{f} = 0$$

と，分散関係式

$$\partial_{t_k^{(\mu)}}\vec{f} = \boldsymbol{E}_\mu \partial_y^k \vec{f}, \quad i(\vec{f}(z^{(\mu)} + 2i\delta) - \vec{f}(z^{(\mu)})) = \boldsymbol{E}_\mu \partial_y \vec{f}$$

を課す．ただし太字で表した文字は 2×2 行列であり，特に $\boldsymbol{E}_\mu$ は

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を表すものとする．ここから $\boldsymbol{P}$ の満たす方程式系（佐藤方程式）を導き，簡約条件 $\left(\partial_{t_1^{(1)}} - \partial_{z^{(2)}}\right)\boldsymbol{P} = 0$ あるいは $\left(\partial_{t_1^{(2)}} - \partial_{z^{(1)}}\right)\boldsymbol{P} = 0$ を課す．すると，$\boldsymbol{W}^{(1)}$ の成分が方程式 (2) を満たすことが示される．すなわち佐藤理論に基づいて INLS 階層が構成される．

2. INLS の明るい多ソリトン解を求めた．

佐藤理論によって導かれたことにより，(2) の多ソリトン解が Wronski 行列式の形で自然に得られる．これを U とおく．問題は U が微差分方程式 (2) だけではなく積分変換で書かれた元々の INLS 方程式 (1) の解にもなっているかどうかである．そのためには，(2) の多ソリトン解を U とおくと，U が解析的条件

① x, t が実数ならば $U(x-i\delta, t)$ と $U(x+i\delta, t)$ が複素共役，

② $U(z, t)$ は領域 Im $z \le \delta$ を含むある開集合で正則，

③ z が②の領域にあるとき，$z=x+iy$ として $\lim_{x\to\infty} U(z,t) = -\lim_{x\to-\infty} U(z,t)$.

を満たせば十分であることを示し，さらにこれらの性質を満たす U を具体的に構成した.

3. 一般内部波階層，INLS 階層のような非局所可積分系を双線形恒等式および Fermion 描像の観点から特徴づけた．すなわち一般内部波階層は $2s$-簡約 KP 階層の，INLS 階層は NLS 階層の径数 δ に沿った変形であると考えられることを示した.

代表的な可積分系である KP 階層，2 成分 KP 階層には佐藤方程式以外にも双線形恒等式および Fermion 描像と呼ばれる 2 種類の表式がある．非局所的な可積分方程式の階層である一般化内部波階層と本論文で得られた INLS 階層をとりあげ，それぞれの双線形恒等式と Fermion 描像を考察した．その結果 s 次の一般化内部波階層の対称性は

$$\mathfrak{u}_{2s} := \left\{ X \,\middle|\, X \in \overline{\mathfrak{gl}(\infty)},\ [X,\ \hat{H}_{2s}] \in \mathbb{C} \right\},$$

であり，INLS 階層の対称性は $\mathfrak{u}_2$ であると考えられることが分かった．ただし

$$\hat{H}_{2s} := \sum_{n\geq 2} \frac{\Delta^{n-2}}{n} H_{sn}.$$

であり，H_n は $\mathfrak{gl}(\infty)$ の Heisenberg 部分代数の標準的な基底である.

4. 追従型交通流モデルの衝撃波解を発見した.

追従モデルと呼ばれる交通流モデルは，古典可積分系とは関係無いが非線形な遅れ型偏微分方程式であるので大いに本研究の興味の対象である.

追従モデルは一次元的な道路を複数の車が走っている状況を記述するモデルであって，具体的に書くと次のような時間遅れのある微差分方程式の形をしている.

$$\dot{x}_n(t) = F(x_n(t-\tau) - x_{n-1}(t-\tau)) \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

式中 $x_n(t)$ は n 番目の車の時刻 t における位置座標であり，時間遅れ τ は交通状況に対する人の反応時間を表す．関数 F は模型を特徴づけるもので，力学系におけるポテンシャルに対応する．F が指数関数，双曲正接関数の場合に指数関数を用いて表されるキンクの衝撃波解を求めた.