論文審査の結果の要旨

氏 名　土谷 洋平

本論文は遅れ型非線形微 (差) 分方程式に関する3つの重要な結果を与えている. 一つは、可積分な遅れ型非線形微分方程式をKP 階層における佐藤理論の拡張によって構成したこととともにその方程式の対称性の特徴づけが得られたことである。もう一つは、非局所的なソリトン方程式と遅れ型微分方程式との関係を用い、非線形 Schrödinger 方程式の非局所的な拡張であるINLS 方程式の明るいソリトン解を求めたことである。3つ目の結果は、交通流モデルとして使われている遅れ型非線形微差分方程式の新しい衝撃波解を発見したことである。

非局所的とは、本論文では特異積分変換

$$T[f](x) := \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\delta}\coth[\frac{\pi}{2\delta}(y-x)]f(y)dy$$

の項を持つという意味である. 非局所的な方程式は, 虚数方向の空間遅れの項をもつ偏微分方程式に書き直して考えるのが常である. 本論文の前半では、非局所非線形 Schrödinger 方程式 (INLS 方程式)

$$iu_t = u_{xx} - u(i+T)(|u|^2)_x \tag{1}$$

の Plemelj 形式
$$\begin{cases} iu_t = u_{xx} - 2uw_x^+, & -iv_t = v_{xx} - 2vw_x^-, \\ w^- - w^+ = i\sigma uv, & w^+(x+2i\delta) = w^-(x) \end{cases} \tag{2}$$

を最低次に持つ階層が構成されている. そのために用いられた佐藤理論の拡張は、変数 $y, z^{(\mu)}, t_1^{(\mu)}, t_2^{(\mu)}, \cdots$ $(\mu = 1, 2)$ のベクトル値関数 $\vec{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ に対して線形常微分方程式 $\boldsymbol{P}\partial_y^n \vec{f} := \partial_y^n \vec{f} + \boldsymbol{W}^{(1)}\partial_y^{n-1}\vec{f} + \boldsymbol{W}^{(2)}\partial_y^{n-2}\vec{f} + \cdots + \boldsymbol{W}^{(n)}\vec{f} = 0$ と, 分散関係式

$$\partial_{t_k^{(\mu)}}\vec{f} = \boldsymbol{E}_\mu \partial_y^k \vec{f}, \quad \boldsymbol{E}_\mu = \left(\delta_{ij}\delta_{j\mu}\right)_{2\times 2}$$
$$i(\vec{f}(z^{(\mu)} + 2i\delta) - \vec{f}(z^{(\mu)})) = \boldsymbol{E}_\mu \partial_y \vec{f}$$

を課すことによって得られたものである。本論文提出者は、$\boldsymbol{P}$ の満たす佐藤方程式系に簡約条件 $\left(\partial_{t_1^{(1)}} - \partial_{z^{(2)}}\right)\boldsymbol{P} = 0$ を課すと, $\boldsymbol{W}^{(1)}$ の成分が方程式 (2) を満たすことを示した. なお、佐藤理論を用いることにより, (2) の多ソリトン解が Wronski 行列式の形で自然に得られるが、その解が微差分方程式 (2) だけではなく INLS 方程式 (1) の解にもなるのかという問題がある. そのためには, 方程式系 (2) の解 U が　a) 「x, t が実数ならば $U(x-i\delta, t)$ と $U(x+i\delta, t)$ が複素共役である」 b)

「$U(z,t)$ は領域 $\mathrm{Im}\, z \leq \delta$ を含むある開集合で正則である」 c) 「z が b) の領域にあるとき，$z = x + iy$ として $\lim_{x\to\infty} U(z,t) = - \lim_{x\to-\infty} U(z,t)$ が成り立つ」の3つの条件を満たせば十分であることが示され，この条件を満たす明るいソリトン解が構成された．さらに、一般内部波階層，INLS 階層のような非局所可積分系を双線形恒等式および Fermion 描像による特徴づけが得られた．すなわち一般内部波階層は $2s$-簡約 KP 階層の，INLS 階層は NLS 階層の径数 δ に沿った変形であると考えられることが示された．特に、非局所的な可積分方程式の階層である一般化内部波階層と本論文で得られた INLS 階層のそれぞれの双線形恒等式と Fermion 描像が考察され、その結果 s 次の一般化内部波階層の対称性は

$$\mathfrak{u}_{2s} := \left\{ X \,\middle|\, X \in \overline{\mathfrak{gl}(\infty)},\ [X,\ \hat{H}_{2s}] \in \mathbb{C} \right\},$$

であり，INLS 階層の対称性は $\mathfrak{u}_2$ であると考えられることが明らかになった．ただし $\hat{H}_{2s} := \sum_{n\geq 2} \frac{\Delta^{n-2}}{n} H_{sn}$ であり，H_n は $\mathfrak{gl}(\infty)$ の Heisenberg 部分代数の標準的な基底である．

本論文の後半で考察されたのは、次のような時間遅れのある微差分方程式である．

$$\dot{x}_n(t) = F(x_n(t-\tau) - x_{n-1}(t-\tau)) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

この方程式は「追従モデル」と呼ばれている一次元的な道路を複数の車が走っている状況を記述する交通流モデルである．式中 $x_n(t)$ は n 番目の車の時刻 t における位置座標であり，時間遅れ τ は交通状況に対する人の反応時間を表す．関数 F は模型を特徴づけるもので，力学系におけるポテンシャルに対応する．このモデルに関して、論文提出者が、F が指数関数または双曲正接関数の場合、広田の双線形化法を用いて新しい衝撃波解を構成した．

まとめると、論文提出者は、非局所的な可積分系に関して、(1) 佐藤理論に基づいて INLS 階層を構成し、(2) その階層における方程式の明るいソリトン解を得、(3) それらの方程式の対称性の特徴付けを完遂した．さらに、(4) 追従モデルの新しい衝撃波解を得た．特に (3) に得られた結果が可積分系に関して非常に興味深い結果であると思われている．よって、論文提出者 土谷洋平 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。