論文の内容の要旨

論文題目：ON THE SPACE OF KNOTS AND CONFIGURATION SPACE

（結び目の空間と配置空間について）

氏名：境 圭一

本論文では，$\mathbb{R}^n$ 内の long knot 全体のなす空間 $\mathcal{K}_n$，および枠つき版である $\widetilde{\mathcal{K}}_n$ 等の（コ）ホモロジー群について，特に $n>3$ の場合に，Poisson 代数の構造やグラフ複体との関わりの立場から考察する．ここで long knot とは，埋め込み $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ で，ある有界集合の外では与えられた線形埋め込みに一致するもの，またその枠とは，結び目の各点に $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底が連続的に与えられ，n 番目のベクトルが結び目の長さ 1 の速度ベクトルに一致しているものをいう．

研究に用いられる道具は，小球のなす operad とその作用 [6]，余単体的空間の全空間のホモロジーに収束するスペクトル系列 [1] とそこに現れる Hochschild 複体 [4]，Goodwillie の関手解析，配置空間上の反復積分による写像空間の de Rham 理論とグラフ複体 [2]，等である．いずれもループ空間に関する古典的な研究の一般化，あるいは精密化としての側面を持っている．また $\mathcal{K}_3$ の場合に有限型不変量とコード図の関係が知られているが，$n>3$ の場合の類似の議論では，グラフコホモロジーが補正項なしで $H^*(\mathcal{K}_n)$ の部分代数を実現する．

理論の随所に，ユークリッド空間内の点の配置空間 Conf が現れることは注目に値する．根底には，結び目を有限個の点列で近似しようというアイデアがある（それはループ空間の幾何に既に現れていた）．Conf は有限個の点列の空間として自然に現れ，結び目の空間のトポロジーに深く関わる．

本論文は大きく二つの部分に分けられる．前半ではコード図に由来する $\mathcal{K}_n$ や $\widetilde{\mathcal{K}}_n$ の（コ）ホモロジーの部分代数と，ループ空間 $\Omega\mathrm{Conf}$ の（コ）ホモロジーの自然な関係について考察した．後半では $\widetilde{\mathcal{K}}_n$ 及びその変種である $\mathcal{K}'_n$（後述）への小円板のなす operad の作用を調べ，ホモロジー群に誘導される Poisson 代数の構造について，その代数的な公式を記述した．

まず Poisson 代数の構造に関して概観する．Poisson 代数とは，積に対して微分として振舞う Lie ブラケットを持つ結合的代数である（結び目の空間は連結和によりホモトピー可換な積構造を持つ）．ここでは $\mathcal{K}_n$ 自身でなく，枠に相当する情報を付け加えた空間 $\mathcal{K}'_n$ を扱う．$\mathcal{K}'_n$ は，$\mathcal{K}_n$ からはめ込みの空間への自然な包含写像のホモトピーファイバーである．Sinha は，ある乗法的 operad X_n を用いて

$$\mathcal{K}'_n \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{Tot}}\, X_n^\bullet \tag{1}$$

が成り立つことを示した ([9])．これは Goodwillie-Weiss の関手解析に基づく結果である．ここで $X_n^\bullet$ は乗法的 operad に付随する余単体的空間である．

目的となる Poisson 代数の構造は次のように得られる．(1) と [7] の構成から，小円板のなす operad $\mathcal{D}$ の空間レベルでの作用により，$H_*(\mathcal{K}'_n)$ に Browder 作用素 λ が導かれる．λ が Poisson ブラケットであることは [3] で示されている．

λ の代数的な公式を記述するため，(1) と [1, 4] から得られる次のことを使う．$H_*(\mathcal{K}'_n)$ に収束するスペクトル系列で，その E^1 項が operad $H_*(X_n)$ に対する Hochschild 複体であるものが存在し，E^2 上に Gerstenhaber ブラケットと呼ばれる Poisson ブラケット Ψ が定義される．Ψ は元々は代数的に定義されていたが，後に Hochschild 複体への $\mathcal{D}$ の鎖複体の作用に基づくものであることが示された（Deligne 予想）．なお [1] においては，自然な同型 $\varphi : H_*(\widetilde{\mathrm{Tot}}\, X_n^\bullet) \xrightarrow{\cong} E^\infty$ も定義されている．

以上の下で，主定理は次のように述べられる．主張は，空間レベルでの $\mathcal{D}$ の作用が導く Poisson ブラケットが，E^1 項への $C_*(\mathcal{D})$ の作用によるものと一致することである．

定理 1. φ は Poisson 代数の同型 $(GH_*(\mathcal{K}'_n), \lambda) \cong (E^\infty, \Psi)$ を与える．G はある filtration に関する associated quotient である。

証明は，[7] による空間レベルでの $\mathcal{D}$ の作用を operad の言葉で具体的に書き下し，λ の代数的な公式を Ψ のものと比較することでなされる．その際には operad が X_n であることは重要でない．定理 1 は，スペクトル系列が収束するような乗法的 operad $\mathcal{O}$ に対し，$H_*(\widetilde{\mathrm{Tot}}\, \mathcal{O}^\bullet)$ 上の Poisson 代数の構造に関する定理として直ちに一般化される．Salvatore は $\widetilde{\mathcal{K}}_n$ に対しても (1) と同様の定式化を得た ([8])．従って定理 1 は $\widetilde{\mathcal{K}}_n$ に対しても適用される．λ の非自明性はグラフとの関連の中で述べられる．

次に各種のグラフとの対応に触れる．まず $H_*(\mathcal{K}'_n)$ や $H_*(\widetilde{\mathcal{K}}_n)$ は，コード図のなす代数を 4 項関係式で割って得られる代数 $\mathcal{A}$ に同型な部分代数を含むことに注意する．この部分代数は，コードに対応する二重点を持つはめ込みを経由して定義されるサイクルで生成され，次数 $(n-3)k$（k はコードの数）を持つ．その非自明性は，次の定理で得られるコサイクルとのペアリングにより示される．

定理 2. $n > 3$ を奇数とする．配置空間上での反復積分を用いて，あるグラフ複体 $D^{*,*}$ から $\widetilde{\mathcal{K}}_n$ の de Rham 複体へのコチェイン写像

$$I : D^{k,l} \longrightarrow \Omega^{(n-3)k+l}(\widetilde{\mathcal{K}}_n)$$

を定義できる．この写像が 3 価グラフの部分 $l = 0$ でコホモロジー群に導く写像は単射である．

これは $\mathcal{K}_n$ の場合には [2] により知られており，$\widetilde{\mathcal{K}}_n$ に対しても平行な議論で示せた．その方法はループ空間に対する Chen の de Rham 理論の精密化である．3 価グラフに対応するコサイクルと，コード図から決まるサイクルとのペアリングは，ちょうど重み系とコード図のペアリングに対応し，そのことから $\mathcal{A}$ に同型な部分代数が $\bigoplus_k H_{(n-3)k}(\widetilde{\mathcal{K}}_n)$ 内に実現されることがわかる．

この部分代数の元に対し λ を適用することで，あるホモロジー類を特徴づけた．

定理 3. $\iota \in H_{n-3}(\widetilde{\mathcal{K}}_n)$, $v_2 \in H_{2(n-3)}(\widetilde{\mathcal{K}}_n)$ を，それぞれコードが1本，2本のコード図に対応する元とする．$n>3$ が奇数のとき，これらに Browder 作用素を適用して得られる元は0でない：

$$0 \neq \lambda(\iota, v_2) \in H_{3n-8}(\widetilde{\mathcal{K}}_n).$$

同様の非自明なサイクルは $\mathcal{K}'_n$ の場合も存在する．

証明はスペクトル系列上での Ψ の計算と主定理1による．$\lambda(\iota, v_2)$ は次数が $(n-3)k$ の形でないので，$\mathcal{A}$ の元ではない．このような元は（幾何的には）これまで殆ど知られていなかった．

純組み紐の空間との関連として，次のような考察を行った．ループ空間 $\Omega\mathrm{Conf}$ は $\mathbb{R}^n$ 内の純組み紐のなす空間と見なせる．組み紐を適当な方法で閉じることで，写像 $c:\Omega\mathrm{Conf}\to\mathcal{K}_n$ を得る．$H^*(\Omega\mathrm{Conf})$ は水平コード図に対する重み系のなす代数であり，通常のコード図に対する重み系のなす代数 W を自然に含む ([5])．やはりコード図とのペアリングを考えることで，c が導く写像を決定できる．

定理 4. 写像 $c^*: H^*_{DR}(\mathcal{K}_n)\to H^*_{DR}(\Omega\mathrm{Conf})$ は，定理2の類似で得られる部分空間 $V=I(\bigoplus_k H^{k,0}(D))$ 上で単射である．c^* の像は W に一致する．

写像 I は $\mathcal{K}_3$ のときは補正項つきで定義され，結び目に対する有限型不変量を与える．この意味で V の元は有限型不変量の高次元版と考えることができる．3次元の場合によく知られた $W=V$ という関係が，$n>3$ においては幾何的な写像 c により実現されていることになる．

参考文献

[1] A. Bousfield, *On the homology spectral sequence of a cosimplicial space*, Amer. J. Math., 109 (1987), no.2, 361-394.

[2] A. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, R. Longoni, *Configuration spaces and Vassiliev classes in any dimensions*, Alg. and Geom. Topol., 2 (2002), 949-1000.

[3] F. R. Cohen, *The homology of $\mathcal{C}_{n+1}$-space, $n \geq 0$*, Springer LNM 533, 207-351.

[4] M. Gerstenhaber, A. Voronov, *Homotopy G-algebras and moduli space operad*, Internat. Math. Res. Notices 1995, no. 3, 141-153.

[5] T. Kohno, *Loop spaces of configuration spaces and finite type invariants*, Geom. and Topol. Monographs Vol. 4: Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto 2001), 143-160.

[6] P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Springer-Verlag, LNM 271, 1972.

[7] J. McClure, J. Smith, *Cosimplicial objects and little n-cubes I*, Amer. J. Math. 126 (2004), no.5, 1109-1153.

[8] P. Salvatore, *Knots, operads and double loop spaces*, math.AT/0608490.

[9] D. Sinha, *Operads and knot spaces*, J. Amer. Math. Soc. 19 (2006), no. 2, 461-486.