論文の内容の要旨

論文題目: An inverse numerical method by reproducing kernel Hilbert spaces and its applications to linear inverse problems (再生核ヒルベルト空間による逆問題数値計算法とその線形逆問題への応用)

氏名　竹内 知哉

線形逆問題は，適当な定式化の下で，方程式 $Kf = g$ を与えられた $g \in W$ に対して解く問題へ帰着される．ここで，K はコンパクト線形作用素 $K\colon V \to W$ であって，V,W は適当な Hilbert 空間とする．実際には，観測誤差などの影響により，データ $g \in W$ を直接利用することは不可能で，誤差の混入したデータ $g^\delta \in W$ を利用せざるを得ない．

V の有限次元部分空間の列 $V_m := \{f_1^m, \ldots, f_m^m\}$ を適当に選び，$W_m := \mathrm{span}\{K(f_1^m), \ldots, K(f_m^m); f_k^m \in V_m,\ 1 \le k \le m\}$ と定義する．g^δ の W_m への射影 $f_{m,\delta} := \arg\min_{f \in V_m} \|K(f) - g^\delta\|_W$ を $Kf = g$ の近似に採用したい．ところが，逆問題固有の不安定性により，$f_{m,\delta}$ は解 f の近似として安定に構成できるとは限らない．この不安定性を除くため，Tikhonov 正則化

$$f_{\alpha,m,\delta}; = \arg\min_{f \in V_m} \|Kf - g^\delta\|_W^2 + \alpha\|f\|_V^2, \tag{1}$$

を逆問題の近似解に用いた．ただし，$\alpha > 0$ とする．近似解の収束の確立および簡便な数値解法のために，V および V_m の選択が重要であり，本論では以下の定式化を採用した．すなわち，Φ を $\mathbf{R}^d$ の部分集合 E 上定義された再生核とし，V として Φ の生成する再生核 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を採用し，V_m として $V_m := \mathrm{span}\,\{\Phi(\cdot, x_k); x_k \in X_m\}$ で定義される有限次元部分空間を採用した．ここで，$X_m = \{x_1, \ldots, x_m\}$ は E の有限部分集合で，$\lim_{m\to\infty} \sup_{x \in E} \inf_{x' \in X_m} |x - x'| = 0$ を満たすとする．本定式化の利点は，V_m による V の元の近似の精度の度合いを柔軟に制御できること，および V_m の構成は極めて単純であり，空間 E の区分的分割を必要としないことである．以上の利点により，線形逆問題に対して実行が容易で良好な計算結果を与える数値再構成法が実現した．さらに，再生核を用いた関数補間に関する評価式を用いて，近似解 $f_{\alpha,m,\delta}$ の解 f への収束を示した．

本手法の数学的正当化を第１章で行い，続く２，３章で代表的な偏微分方程式に対する線形逆問題に適用し本手法の有効性を検証した．

第1章の内容

本章では，線形逆問題に対する再生核ヒルベルト空間による離散化チホノフ正則化法の一般論を確立した．

再生核 $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ の正値性により，E の任意の有限集合 $X_m = \{x_1, \dots, x_m\} \subset E$，および任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して，方程式

$$f(x_k) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \Phi(x_k, x_j), \quad k = 1, \dots, m,$$

は $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ に関して一意可解である．解 $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ を用いて，$P_m(f)(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \Phi(x, x_j)$ と定義し，$\gamma_m = \|K(I - P_m)\|$ とおく．μ を集合 E 上の測度とする．次の定理を示した．

定理 1. $\lim_{m\to\infty} \gamma_m = 0$ とする．

(i) $\sup_{x\in E} \Phi(x, x) < \infty$ とする．α を $\lim_{m\to\infty} \alpha(m) = 0$ ならびに $\lim_{m\to\infty} \dfrac{\gamma_m^2}{\alpha(m)} < \infty$ となるように選ぶと，$\lim_{m\to\infty} \|f_{\alpha(m),m} - K^\dagger g\|_{L^\infty(E,\mu)} = 0$.

(ii) $\int_E \Phi(x, x) d\mu(x) < \infty$ とする．$\delta > 0$ に対して $m = m(\delta)$ ならびに $\alpha = \alpha(\delta)$ を以下を満たすように選ぶとする：$\lim_{\delta\to 0} m(\delta) = \infty$, $\lim_{\delta\to 0} \alpha(\delta) = 0$ とし，$\lim_{\delta\to 0} \dfrac{\delta^2}{\alpha(\delta)} < \infty$ かつ $\lim_{\delta\to 0} \dfrac{\gamma_{m(\delta)}^2}{\alpha(\delta)} < \infty$. そのとき，$\lim_{\delta\to 0} \|f_{\alpha(\delta),m(\delta),\delta} - K^\dagger g\|_{L^2(E,\mu)} = 0$.

ここで，$K^\dagger g$ は $Kf = g$ のノルムが最小となる最良二乗近似解である：
$K^\dagger g = \arg\inf_{v\in\mathscr{V}} \|v\|$, ただし, $\mathscr{V} = \{v \in V; \|Kv - g\| = \inf_{f\in V} \|Kf - g\|\}$.

第2章の内容

以下の楕円型偏微分方程式のコーシー問題を考えた：

$$Au(x) = 0, \qquad x \in \Omega, \qquad u(x) = g_1(x), \quad \partial_\nu u(x) = g_2(x), \qquad x \in \Gamma.$$

ここで $\Omega \subset R^n$ は有界領域で，$\Gamma(\neq \partial\Omega)$ は $\partial\Omega$ の部分境界であって，A は一様楕円型偏微分作用素であり，∂_ν は法線微分である．

ここで考察する逆問題は, Γ 上で与えられたノイズの混入した Dirichlet データ g_1^δ, および Neumann データ g_2^δ から，$\Sigma := \partial\Omega \setminus \Gamma$ 上の Neuman データを再構成する問題である．

本数値手法において数値解の精度向上ならびに数値解の安定性のため Tikhonov 正則化の設定に次のような修正を加えたことが重要であった．すなわち、再生核 Φ を適切に選んで $\Sigma := \partial\Omega \setminus \Gamma$ 上での再生核 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\Sigma$ を定義し部分境界 $\Gamma_0 \subset \Gamma$ を適切に定め，第1章の方法で V_m を $\mathcal{H}_\Sigma$ に関して構成して，離散化された Tikhonov 正則化を考えた：

$$\min_{\varphi\in V_m} \quad \|u(\varphi, g_1^\delta, g_2^\delta, h) - g_1^\delta\|^2_{L^2(\Gamma\setminus\Gamma_0)} + \alpha\|\varphi\|^2_{\mathcal{H}_\Sigma}.$$

ここで，$u(\varphi, g_1^\delta, g_2^\delta, h)$ は，境界値問題

$$Au = h,\ x \in \Omega, \quad \partial_A u|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = \varphi, \quad u|_{\Gamma_0} = g_1^\delta, \quad \partial_A u|_{\Gamma\setminus\Gamma_0} = g_2^\delta,$$

の解であり，$\|g_1 - g_1^\delta\|_{L^2(\Gamma)} \le \delta, \quad \|g_2 - g_2^\delta\|_{L^2(\Gamma)} \le \delta$. とする．

$K : \mathcal{H}_\Sigma \to L^2(\Gamma)$ を $K(\varphi) = u(\varphi, 0, 0, 0)$ と定義すると，上述の最適化問題は (1) の形に帰着する．第1章の結果を用いて以下を示した．

定理 2. 関数 $p\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ を，$\lim_{r\to 0} p(r) = 0$ を満たす実数値関数とし，評価式 $\|f - P_m(f)\|_{L^\infty(\Omega)} \le p(h_m)\|f\|_{\mathcal{H}}$ が任意の $m \in \mathbb{N}$，任意の $f \in \mathcal{H}$ で成り立つと仮定する．ここで，$h_m = \sup_{x\in E} \inf_{x'\in X_m} |x - x'|$ である．

(i) α を $\lim_{m\to\infty} \alpha(m) = 0$ ならびに，$\lim_{m\to\infty} \dfrac{p^2(h_m)}{\alpha(m)} < \infty$ となるように選ぶと $\lim_{m\to\infty} \|\varphi_{\alpha(m),m,0} - \partial_A u\|_{L^2(\Sigma)} = 0$.

(ii) $\delta > 0$ に対して $m = m(\delta)$ ならびに $\alpha = \alpha(m)$ を以下を満たすように選ぶとする：$\lim_{\delta\to 0} m(\delta) = \infty$, $\lim_{\delta\to 0} \alpha(\delta) = 0$ とし，$\lim_{\delta\to 0} \dfrac{\delta^2}{\alpha(\delta)} < \infty$ かつ $\lim_{\delta\to 0} \dfrac{p(h_{m(\delta)})^2}{\alpha(\delta)} < \infty$．そのとき，$\lim_{\delta\to 0} \|\varphi_{\alpha(\delta),m(\delta),\delta} - \partial_A u\|_{L^2(\Sigma)} = 0$.

数値実験を行い，本数値解法が既存の方法と比較して、逆問題固有の不安定性にも関わらずデータの誤差に対して良好な結果を与えることを確かめた.

楕円型コーシー問題に関して，領域 Ω 内部での解は，適当な有界性の仮定を課すと，安定性を回復することがよく知られており，条件付き安定性とよばれている．しかし，第 2 章で考察している問題は領域内部だけではなくデータが全く与えられていない部分境界での解の再構成であり，そのような場合に対応する条件付き安定性の結果は一般に知られていなかった．そこで本章では，Carleman 評価を用いて，適当な階数の Sobolev ノルムが有界であるという条件の下で境界上での安定性評価式を導いた：

定理 3. $\eta > \dfrac{n+2}{2}$ とする．そのとき、$0 < \kappa_0 < 1$ に対して、ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\|u\|_{L^\infty(\partial\Omega\setminus\Gamma)} \le C\|u\|_{H^\eta(\Omega)} \left(\log \frac{1}{\|g_0\|_{L^2(\Gamma)} + \|g_1\|_{L^2(\Gamma)} + \|f_0\|_{L^2(\Omega)}} + \log \frac{1}{\|u\|_{H^\eta(\Omega)}} \right)^{-\kappa_0}.$$

このような条件付き安定性は，それ自身の興味に留まることなく本論文の数値法に確固たる理論的裏付けを与えるものである．数値実験の結果の精度を条件付き安定性評価式によって合理的に解釈しうることを示した.

第 3 章の内容

Ω を $\mathbf{R}^n$ の滑らかな境界を持つ有界領域とし，$Q_T := (0,T) \times \Omega$ とおく．Γ を境界 $\partial\Omega$ の部分集合とし，$\Sigma_1 := (0,T) \times \Gamma$, $\Sigma_2 := (0,T) \times (\partial\Omega\setminus\Gamma)$，$\Sigma := \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ とする．放物型偏微分方程式に対する非特性コーシー問題を考えた：

$$\partial_t u(x,t) = Au(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,T).$$

以下, A は第 2 章と同じものとする.

本章では，境界 Σ_1 上で与えられた誤差の混入した Dirichlet データ g_1^δ，Neumann データ g_2^δ を用いて，領域 $\Omega \times [0,T)$ 内における解 $u(t,x)$ および $\partial_A u|_{\Sigma_2}$ を再構成する逆問題を扱った．ここで，$\|g_1^\delta - g_1\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|g_2^\delta - g_2\|_{L^2(\Sigma_1)} \le \delta$ であり，誤差限界 $\delta > 0$ は既知とする．解の再構成のため，未知境界 $\partial\Omega\setminus\Gamma$ における未知境界データ $\partial_A u|_{\Sigma_2}$，および初期温度分布 $u(0,x)$ を同時に再構成した．再構成は第 2 章と同様に，Tikhonov 正則化を考えることで行った．すなわち，$\mathcal{H}_\Omega$，$\mathcal{H}_{\Sigma_2}$ を適切に定められたそれぞれ Ω, Σ_2 上の再生核 Hilbert 空間とし，$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\Sigma_2} \times \mathcal{H}_\Omega$ とする．第 1 章の方法で V_m^1 および V_n^2 をそれぞれ $\mathcal{H}_{\Sigma_2}$ および $\mathcal{H}_\Omega$ に関して構成して，離散化された Tikhonov 正則化を考えた：

$$\mathrm{Min}_{(\varphi,\psi)\in V_m^1\times V_n^2} \|u(\varphi,\psi,g_2^\delta,h) - g_1^\delta\|^2_{L^2(\Sigma_1)} + \alpha\|(\varphi,\psi)\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{2}$$

ここで，$u(\varphi, \psi, g_2^\delta, h)$ は，

$$\begin{cases} \partial_t u = Au + h, & Q_T, \\ \partial_A u|_{\Sigma_1} = g_2^\delta, \\ \partial_A u|_{\Sigma_2} = \varphi, \\ u(0,\cdot) = \psi, & \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

の一意解である．$K : \mathcal{H} \to L^2(\Sigma_1)$ を適切に定めれば，最小化問題 (2) は (1) に帰着され，第 1 章の一般論を用いて $\partial_A u|_{\Sigma_2}$, 及び初期温度 $u(0,\cdot)$ を近似的に再構成した．ここで得られた近似をもとに，(3) を解いて Q_T での $u(t,x)$ の近似を求めることができる．収束に関して，定理 2 と同様の結果を得た．数値実験を行い本数値解法が安定な数値解を与えることを検証した．

謝辞

本学位論文完成にあたり，多くの方から支援，協力を頂きました．

指導教官である山本昌宏助教授（東京大学大学院数理科学研究科）には，修士課程に始まり，博士課程，論文完成に至るまで，長年に渡り幅広い見地から様々な御指導と御助言を賜りました．深く感謝致します．国内外から招聘された多くの逆問題研究者と知遇を得る機会を多数設けて頂き，更に幾つかの共同研究への参画を促して頂いたことは，私にとって大変幸運でした．共同研究を通して様々な数学的，工学的知見，及び研究成果を得ることができたことは偏に山本先生の御支援の賜と心より感謝致します．

中川淳一主幹研究員（新日本製鐵株式会社）には，現場の種々の逆問題の実態に関する議論，数値解析結果の現場の立場からの評価などを通して，数学，工学に関する幅広い知見並びに本学位論文で扱う逆問題数値計算手法に関して有益な御指導を賜りました．ここに深く感謝を申し上げます．

伊東一文教授（Department of Mathematics North Carolina State University, Raleigh）には，数値計算を遂行する上で重要となる非線形最適化問題の解法，偏微分方程式の高速数値解法など種々の具体的な解法に関して御指導を賜りました．心より感謝致します．

Benny Y. C. Hon 助教授（香港城市大学数学系）には，radial basis function を用いた偏微分方程式の数値解法について御指導頂きました．radial basis function の逆問題への応用を機縁として始まった研究を，再生核にまで拡張した成果が本学位論文の主要結果の一つです．Hon 先生には深く感謝致します．

Leevan Ling 助教授（香港浸會大学数学系）には，良き師として，また良き友として，数値計算手法，プログラミング，計算機に関する極めて多数の御指導を賜りました．心から感謝致します．

数理科学研究科のスタッフの方々には，不自由なく研究に専念出来る環境を常に提供して頂きました．深く御礼申し上げます．

最後に，長年に渡り様々な面で私を温かく支えてくれた家族，親族に改めて感謝致します．