論文審査の結果の要旨

氏名：　竹内知哉

竹内知哉氏は、本論文において線形逆問題に対してチホノフの正則化法の離散化に再生核ヒルベルト空間を用いた数値解法を開発し、近似解の収束などを含む一般論を完成した。さらに楕円型方程式に対するコーシー問題ならびに放物型方程式に対する非特性コーシー問題にその手法を適用し、数値解が既存の方法と比べて精度がよいことを数値実験によって確認した。楕円型方程式に対するコーシー問題に関しては逆問題自体の数学解析を行った。楕円型方程式のコーシー問題はアダマール以来、データの微小変動が解に破壊的に大きな誤差を引き起こす非適切問題として特に有名であるが、心電図逆問題、重力異常などを用いた資源探査技術ならびに液相・固相が共存している場合の液相面の形状決定など医学的、物理的にも産業分野でもその解法が要求されている。したがって、楕円型方程式のコーシー問題に関しては、誤差に強い数値解法が数多く提案されてきた。竹内氏が新たに研究・開発した再生核ヒルベルト空間を用いたチホノフ正則化法は、そのような既存の多くの方法のなかにあって、数値解の収束も保証され、しかも数値的な有効性の点でも優れたものである。

以下、章ごとに論文審査の結果について述べる。

第１章において、線形逆問題に対する再生核ヒルベルト空間による離散化チホノフ正則化法の一般論が確立された。線形逆問題は，適当な定式化の下で，方程式 $Kf=g$ を与えられた $g\in W$ に対して解く問題へ帰着される。ここで，K はコンパクト線形作用素 $K\colon V\to W$ であって, V,W は適当なヒルベルト空間とする。線形逆問題の近似解 $\tilde{f}$ を、データからの偏差: $\|K\tilde{f}-g\|^2$ が最小になるように決めるという最良二乗近似解をまず考えることができるが、もとの逆問題の不安定性のため、このスキームは数値的にも安定な解法とならないことは良く知られている。そこでチホノフの正則化項と呼ばれる $\alpha\|\tilde{f}\|^2$ を加えた汎関数 $\|K\tilde{f}-g\|^2+\alpha\|\tilde{f}\|^2$ の最小化問題を考えるという正則化法がチホノフらによって考案された。$\alpha>0$ はチホノフの正則化パラメータと呼ばれる正の定数であり、近似解の収束のために適切に選ぶ必要がある。さらに、数値計算のためにはチホノフの正則化法を離散化しなくてはならない。チホノフの正則化法の離散化に関してはリッツの方法に基づいた一般論がすでに知られている。これは、解を考えているヒルベルト空間 V に対して有限次元部分空間の族 $\{V_m\}_{m\in N}$ を適切に構成して、チホノフの正則化法を V_m において考えて、その最小化元 f_m の極限として、もとの逆問題の近似解を構成しようとするものである。

竹内氏の方法の真髄は、適切に構築された再生核ヒルベルト空間によって $\{V_m\}_{m\in N}$ を構成するという点にある。その結果、V_m による V の元の近似の精度の度合いを柔軟に制御できることに成功した。もともとの線形逆問題自身が不安定性を有するので、離散化をむやみに細かくすると元の問題の不安定性をより忠実に再現することになり、多くの場合に数値解法が破綻することは古くから知られている。近似有限次元空間の単調性 $V_m\subset V_{m+1}$ が満たされている場合には、離散化近似解の収束のためには、正則化パラメータの選択とともに、少なくとも理論的には離散化のサイズをどのように選択すべきかという判定条件は知られて

いる。しかしながら、逆問題に対して具体的に数値解法を提案する際には、使用できるデータの精度・誤差限界に応じて離散化のサイズを効率的に制御して選択できるようにプログラムを構築することが、実用化可能な数値手法のためには必要不可欠であり、同氏の方法はそのような要請に充分答えるものである。そのためには、V_m に単調性を仮定しないことが望ましい。第１章において、単調性を仮定しないで離散化チホノフ正則化法の V における弱収束が証明され、しかも離散化を再生核ヒルベルト空間で構成した場合には、弱収束を随伴するノルムでの強収束に改良できることが証明された。

再生核ヒルベルト空間を離散化の手段としてチホノフの正則化法に組み込みことは竹内氏の独創であり、高く評価できる。

竹内氏の一般論の数値的な有効性は個々の逆問題に関して立証していかなくてはならないが、第２，３章において偏微分方程式に対する古典的かつ重要な線形逆問題に適用した。

第２章において、以下の楕円型偏微分方程式のコーシー問題を考えた：

$$Au(x) = 0, \qquad x \in \Omega, \qquad u(x) = g_1(x), \quad \partial_\nu u(x) = g_2(x), \qquad x \in \Gamma.$$

ここで $\Omega \subset R^n$ は有界領域で，$\Gamma(\neq \partial\Omega)$ は $\partial\Omega$ の部分境界であって、A は一様楕円型偏微分作用素であり、∂_ν は法線微分である。ここで考察する線形逆問題は, Γ 上で与えられたノイズの混入したデータ g_1^δ および g_2^δ から，$\partial\Omega \setminus \Gamma$ 上 の $\partial_\nu u$ を再構成する問題である。$\partial\Omega \setminus \Gamma$ 上での再生核ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を適切に定め、第１章の方法によって離散化チホノフ正則化法を考えた。数値実験を行なって、本数値解法が既存の方法と比較して、データの誤差に対して良好な結果を与えることを確かめた。

楕円型コーシー問題に関して、領域 Ω 内部での解は、適当な有界性の仮定を課すと、安定性を回復することがよく知られており、条件付き安定性とよばれている。しかし、ここで考察している問題は領域内部だけではなくデータが全く与えられていない部分境界での解の再構成であり、そのような場合に対応する条件付き安定性の結果は一般に知られていなかったが、竹内氏はカーレマン評価を巧みに用いて、境界までの条件付き安定性を初めて証明した。このような条件付き安定性は、それ自身の興味に留まることなく本論文の数値法に確固たる理論的裏付けを与えるもので評価できる。さらに数値実験の結果の精度をを条件付き安定性評価式によって合理的に解釈しうることを示した。

第３章で、放物型偏微分方程式に対する非特性コーシー問題を考えた：

$$\partial_t u(x,t) = Au(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,T).$$

以下、A, Ω, Γ は第２章と同じものとする。境界 $\Gamma \times (0,T)$ 上で与えられた誤差の混入したデータ g_1^δ，g_2^δ を用いて，$\Omega \times [0,T]$ 内における解 $u(x,t)$ を再構成する逆問題を扱った。第１章の方法を適用し、良好な結果を得た。

竹内知哉氏による成果は、劇的な不安定性を有しながらも応用分野で基本的であって、しばしば現れる数多くの偏微分方程式の線形逆問題に適用できる高速かつ簡便な数値手法であり、数値方法自体の収束なども保証されており、既存の方法と比較しても良好な数値解を与えることができる。また、楕円型方程式のコーシー問題に関しては境界までの条件付き安定性も確立するなど理論的な裏付けも充分なされている。

よって論文提出者　竹内知哉　は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。