論文の内容の要旨

論文題目 The twistor correspondence for self-dual Zollfrei metrics
— their singularities and reduction

(自己双対ツォルフライ計量に関するツイスター対応
— その特異性と簡約)

氏　　名 中田 文憲

この論文は二つの章で構成されている．いずれも自己双対 Zollfrei 計量とそのツイスター対応に関する内容であるが，第一章はリダクションに関する結果，第二章は特異性に関する結果である．二つの章の間の関係はこの要旨の最後に触れる．

まず設定を述べた上で第一章の内容を説明する．$2n$ 次元の多様体上の符号 (n,n) の不定値計量を，ニュートラル計量と呼ぶ．また不定値計量が Zollfrei であるとは，全ての極大な null 測地線が閉であることをいう．特に四次元ニュートラル計量の場合は自己双対性を考える事ができ，この論文では自己双対かつ Zollfrei な四次元ニュートラル計量を扱う．このような計量については C. LeBrun と L. J. Mason の研究により大域的ツイスター対応が構成されている ([4])．

また最近，文献 [1, 2] において「簡約（リダクション）」と呼ぶべき現象が研究されている．これは α-曲面による葉層構造をもつ自己双対ニュートラル

計量について, そのリーフ空間にある幾何構造が誘導されるというものである. ここで α-曲面とは totally null 曲面の二つのタイプのうちの一方であり, 他方を β-曲面と呼ぶ. 上記文献の結果は局所的な結果であるのに対し, 本論文では LeBrun と Mason の大域的ツイスター対応の枠組みの中で, リダクションが生じる設定について論ずる. 第一章はこれをまとめたものであり, 以下にその概要を示す.

四次元多様体 M と, その上の自己双対 Zollfrei 共形構造の組 $(M,[g])$ であって, 時空向き付け可能 (space-time orientable) であるものを考え, それらの同型類全体を $\bar{\mathcal{M}}$ とする. 一方, totally real な埋め込み $\iota : \mathbb{RP}^3 \to \mathbb{CP}^3$ の同型類全体の空間を $\bar{\mathcal{T}}$ とおく. $\bar{\mathcal{M}}$ と $\bar{\mathcal{T}}$ にはそれぞれ標準的な元があり, LeBrun と Mason による結果は次の通りである (Theorem 1.2.6 ; cf.[4]) :

(LM) $\bar{\mathcal{M}}$ の元と $\bar{\mathcal{T}}$ の元は標準的な元に十分近いとき一対一に対応する.

この対応はある種の双ファイブレーションにより特徴づけられる. また, $\mathcal{T}$ から $\mathcal{M}$ への対応の構成には, 空間対 $(\mathbb{CP}^3, \iota(\mathbb{RP}^3))$ の正則円板に関する性質を用いる事を注意しておく. なお, LeBrun と Mason は低次元の対応, すなわち Zoll 射影構造と埋め込み $\mathbb{RP}^2 \to \mathbb{CP}^2$ の間の対応についても類似の結果を得ている ([3]).

これに対して次の対象を考える. $\mathcal{M}$ を四つ組 $(M,[g],S_\infty,\mathcal{F})$ の同値類全体の集合とする. ただし $(M,[g])$ は上述の通り, S_∞ は M 上のひとつの閉 β-曲面, $\mathcal{F}$ は M 上の閉 α-曲面からなる族であって $M \setminus S_\infty$ 上は葉層構造を定めるものである. また $\mathcal{T}$ を組 (ι,ζ_0) の同型類全体の集合とする. ここで, $\iota : \mathbb{RP}^3 \to \mathbb{CP}^3$ は totally real な埋め込み, ζ_0 は像 $P = \iota(\mathbb{RP}^3)$ の一点である. 自然な忘却写像を $f_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \bar{\mathcal{M}}$, $f_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \to \bar{\mathcal{T}}$ とするとき, 第一章の主定理は次の通りである.

定理 A. (Theorem 1.5.11)
$\mathcal{U} \subset \bar{\mathcal{M}}$ と $\mathcal{V} \subset \bar{\mathcal{T}}$ を, (LM) の対応が成立する部分集合とする. このとき, $f_{\mathcal{M}}^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{M}$ と $f_{\mathcal{T}}^{-1}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{T}$ の間には, (LM) と可換となるような一対一対応が存在する. さらに, 対応する $\mathcal{M}$ と $\mathcal{T}$ の元の組は, リダクションにより, 標準的な Zoll 射影構造に関する双ファイブレーションを誘導する.

なお, 低次元でも類似の定理が成立し (Theorem 1.5.16), 定理 A の証明はこの低次元版の定理に帰着することで得られる. 因みに第一章前半の局所的記述により, α-曲面による葉層構造をもつ自己双対ニュートラル計量の局所的一般型が得られる (Proposition 1.3.6).

第二章は, (LM) を特異性を許す状況へ拡張することについて述べられる. まず, 自己双対ニュートラル計量であって, ある二次元球面に沿って特定の特

異性を許すようなものを考え, その Zollfrei 性を定義する. この性質をみたすものの同型類全体の集合を $\mathcal{M}^s$ とおく. 次に, 連続単射 $\iota : \mathbb{RP}^3 \to \mathbb{CP}^3$ であって, $\mathbb{RP}^3$ の一点を除いて totally real な埋め込みとなるものを考える. そのような ι であって, 特に空間対 $(\mathbb{CP}^3, \iota(\mathbb{RP}^3))$ が正則円板に関する良い振る舞いをもつものを考え, それらの同型類を $\mathcal{T}^s$ とおく. 以上の設定で, 次の予想を提示する.

予想 B. (Conjecture 2.2.5)
$\mathcal{M}^s$ と $\mathcal{T}^s$ の元は一対一に対応する.

対応は (LM) と同様の双ファイブレーションによって特徴付けられる.

第二章の主な目的は, 予想 B が成立する具体例を厳密な表示のもと構成することである. $\mathcal{M}^s$ 側の例は J. Petean によって導入された $\mathbb{R}^4$ 上の自己双対計量 (cf.[5]) を二枚はり合わせることによって得られる (Theorem 2.3.7). この例は関数空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)^{\mathrm{sym}}$ の元と一対一に対応する. ただし $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)^{\mathrm{sym}}$ は $\mathbb{R}^2$ 上の $SO(2)$-不変な実数値急減少関数全体である. $\mathcal{T}^s$ 側の例の構成法はここでは省略するが, 各元は $i\mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathrm{odd}}$ の元と一対一に対応する. $i\mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathrm{odd}}$ は純虚数値急減少な奇関数全体である.

定理 C. (Theorem 2.4.1)
次の二つの対象の間には, 双ファイブレーションで特徴付けられる一対一対応が存在する：

(1) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)^{\mathrm{sym}}$ から定まる $\mathcal{M}^s$ の元,
(2) $i\mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathrm{odd}}$ から定まる $\mathcal{T}^s$ の元.

さらに, その対応は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)^{\mathrm{sym}}$ と $i\mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathrm{odd}}$ の間の関係として, Radon 変換を用いて具体的に表される.

最後に第一章と第二章の関係を説明する. 第一章でリダクション可能な大域的状況を設定したが, このとき誘導される Zoll 射影構造は標準的なもののみである. 標準的でない Zoll 射影構造が得られる状況を構成しようとすると, 共形構造およびツイスター空間の特異性を議論する必要性が見え, 予想 B はこの議論を可能にするようなものである. 実際定理 C の例は定理 A に沿った形で構成されており, これはリダクションと特異性を関連づける雛形であるといえる. ただ, この例で誘導される Zoll 射影構造はやはり標準的なものであり, 実際に標準的でない Zoll 射影構造が得られるような大域的リダクションの例や一般論を構築することは今後の課題である.

備考

第一章： Journal of Geometry and Physics に投稿中
第二章： Journal of Geometry and Physics にて公表予定

References

[1] D. M. J. Calderbank: *Selfdual 4-manifolds, projective surfaces, and the Dunajski-West construction*, e-print math.DG/0606754 (2006)

[2] M. Dunajski, S. West: *Anti-self-dual conformal structures with null Killing vectors from projective structures*, e-print math.DG/0601419 (2006)

[3] C. LeBrun, L. J. Mason: *Zoll manifolds and complex surfaces*, J. Diff. Geom. 61, 453-535 (2002)

[4] C. LeBrun, L. J. Mason: *Nonlinear Gravitons, Null Geodesics, and Holomorphic Disks*, e-print math.DG/0504582 (2005)

[5] J. Petean: *Indefinite Kähler-Einstein metrics on compact complex surfaces*, Comm. Math. Phys. 189, 227-235 (1997)