論文内容の要旨

論文題目

On the non-acyclic Reidemeister torsion for knots
(結び目に対する非輪状でないライデマイスタートーションについて)

氏 名　山口 祥司

ライデマイスタートーションとは CW 複体とその基本群の表現に対して定められる不変量である．この不変量は CW 複体の基本群のから定まる局所系に関係しており，初めは局所系が非輪状である場合，つまり局所系のホモロジー群がすべて消えている場合に，定義された．現在は局所系のホモロジー群が消えていない場合にも定義は拡張されており [8, 11, 12]，この論文では主に非自明なホモロジー群を持つ局所系から定まるライデマイスタートーションについて考察を行う．対象となる CW 複体は 3 次元ホモロジー球面の中の結び目の補空間である．

結び目の補空間について，その基本群（結び目群と呼ばれる）から定まる局所系が非輪状になる場合は深く研究されている．結び目群の可換表現に対しては，ライデマイスタートーションはアレキサンダー多項式で表されることが知られている [9, 11]．また表現が非可換な場合には，捩れアレキサンダー不変量 [13] と一致することが示されている [6, 7]．結び目群から定まる局所系が非自明なホモロジー群を持つ場合は [2, 3, 10] などの研究がある．これらの研究において扱われるライデマイスタートーションは結び目群の SU(2) または $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 表現とそれらのリー環への随伴表現との合成から定まる局所系によって定義される．この局所系は次のように与えられる．

K を 3 次元ホモロジー球面 M 内の結び目とし，M_K をその補空間とする．$\widetilde{M}_K$ を M_K の普遍被覆空間とするときに

$$C_*(M_K;\mathfrak{g}_\rho) := \mathfrak{g} \otimes_{Ad\circ\rho} C_*(\widetilde{M}_K;\mathbb{Z})$$

とおく．ここで ρ は結び目群 $\pi_1(M_K)$ の $\mathrm{SU}(2)$ または $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 表現で $\mathfrak{g}$ は $\mathrm{SU}(2)$ または $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ のリー環を表し, このベクトル空間には $\pi_1(M_K)$ が $\mathfrak{g} \ni v \mapsto Ad_{\rho(\gamma)^{-1}}(v) \in \mathfrak{g}, \forall \gamma \in \pi_1(M_K)$ によって右から作用しており, この作用を通して左 $\mathbb{Z}[\pi_1(M_K)]$ 加群の $C_*(\widetilde{M_K};\mathbb{Z})$ とテンソル積をとっている．表現 ρ が既約な場合, この局所系の 1 次のホモロジー群は結び目群の指標代数多様体の余接空間と同型になることが知られている．結び目群の指標代数多様体の各成分の次元は 1 以上であることから, 特に既約な表現についてこの局所系は非自明なホモロジー群をもつことが分かる．

本論文ではこのような局所系に対するライデマイスタートーションの定義を復習した後に, このライデマイスタートーションが捩れアレキサンダー不変量の微分係数で表されることを示す（3 章 Theorem 8）．

捩れアレキサンダー不変量はフォックス微分を使って代数的に計算することができるので, この関係から局所系 $C_*(M_K;\mathfrak{g}_\rho)$ から定まるライデマイスタートーションを代数的に表示することができるようになる．4 章で結び目群の表現について復習し, この表示を使って $5,6,7$ 章で局所系 $C_*(M_K;\mathfrak{g}_\rho)$ から定まるライデマイスタートーションの性質について考察を行う．

5 章では結び目群の表現が $\mathrm{SU}(2)$ の場合の考察が行う．5.1 節では 3 次元球面内のトーラス結び目, 8 の字結び目，5_2 結び目についての具体的な計算を行う．本論文で扱うライデマイスタートーションは指標代数多様体に対しての関数とも見ることが可能である．5.2 節では指標代数多様体上の関数として見たとき, 2 橋結び目の $\mathrm{SU}(2)$-指標代数多様体については臨界点が 2 面角表現と呼ばれる表現 [1] の指標で与えられることを示す．2 橋結び目の 2 面角表現はメタアーベリアン表現とも呼ばれる表現である．

$6,7$ 章では結び目群の表現が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 表現のときを考察する．6 章では $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 指標代数多様体の非可換表現の指標たちからなる成分と可換表現の指標たちからなる成分の交点，分岐点と呼ばれる点で $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 表現に対するライデマイスタートーションの値について考察する．結び目群の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-指標代数多様体の分岐点はアレキサンダー多項式の根と対応がつき, 特に重根でない根に対応する分岐点はこの分岐点を含む指標代数多様体の成分の次元が 1 であり, さらに可換表現の指標の成分と非可換表現の指標の成分は横断的に交わることが知られている [5]．このような分岐点では, 可換表現のライデマイスタートーションは零となってしまうが, その微分係数の 2 乗と $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 表現に対するライデマイスタートーションが等しくなる (Theorem 31)．この関係式は, J. Dubois 氏と R. Kashaev 氏によりプレプリント [4] の中で予想された．

7 章では, ツイスト結び目と呼ばれる結び目のクラスに対してその補空間たちの $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 表現に対するライデマイスタートーションの計算を行う．ツイスト結び目は図式の交点数でパラメータづけられる．ここでは, 交点数 m についてライデマイスタートーションの具体的な表示を与える (Theorem 47)．ツイスト結び目は, 三葉結び目や 8 の字を含み, 三葉結び目以外はすべて補空間

が双曲構造をもつ双曲結び目になっている．ツイスト結び目の補空間の双曲構造から定まるホロノミー表現に注目したとき, ライデマイスタートーションの値はより簡潔な形で表示できる (Theorem 52)．この公式は双曲多様体である補空間の端に現れるカスプを定める複素数から決定されることを示し，具体例を列挙する．

参考文献

[1] G. Burde, SU(2)-*representation spaces for two-bridge knot groups*, Math. Ann., 288 (1990) 103–119.

[2] J. Dubois, *Non abelian Reidemeister torsion and volume form on the* SU(2)-*representation space of knot groups*, *Ann. Institut Fourier* **55** (2005) 1685–1734.

[3] ______, *Non abelian twisted Reidemeister torsion for fibered knots*, Canad. Math. Bull. **49** (2006) 55–71.

[4] ______ and R. Kashaev, *On the asymptotic expansion of the colored Jones polynomial for torus knots*, preprint University of Geneva arXiv:math.GT/0510607 (2005).

[5] M. Heusener, J. Porti and E. Suárez, *Deformations of reducible representations of 3-manifold groups into* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, J. Reine Angew. Math. **530** (2001), 191–227.

[6] P. Kirk and C. Livingston, *Twisted Alexander Invariants, Reidemeister torsion, and Casson-Gordon invariants*, Topology **38** (1999) 635–666.

[7] T. Kitano, *Twisted Alexander polynomial and Reidemeister torsion*, Pacific J. Math. **174** (1996) 431–442.

[8] J. Milnor, *Whitehead torsion*, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966) 358–426.

[9] ______, *Infinite cyclic coverings*, Conference on the Topology of Manifolds (Michigan State Univ. 1967) Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Mass. (1968) pp. 115–133.

[10] J. Porti, *Torsion de Reidemeister pour les variétés hyperboliques*, Mem. Amer. Math. Soc., **128** (612) :x+139 (1997).

[11] V. Turaev, *Introduction to combinatorial torsions*, Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel (2001) viii+123 pp.

[12] V. Turaev, *Torsions of* 3-*dimensional manifolds*, Progress in Mathematics, **208**. Birkhäuser Verlag, Basel (2002) x+196 pp.

[13] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology **33** (1994) 241–256.