

論文の内容の要旨

pseudo-ribbon sphere-link の射影図と分類について

吉田 享平

定義 1 4次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^4 に埋め込まれた閉曲面のことを surface-link という。

2つの surface-link は、1次元の絡み目のときと同様に \mathbb{R}^4 の isotopy で移りあうとき、同値であるという。

定義 2 自然な射影 $\pi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $\pi(x, y, z, t) = (x, y, z)$ で定義する。

surface-link F が generic ジェネリックであるとは、任意の点 $p \in \pi(F)$ が図1のように、正則点、ブランチ点、2重点、3重点のいずれかになっていることをいう。

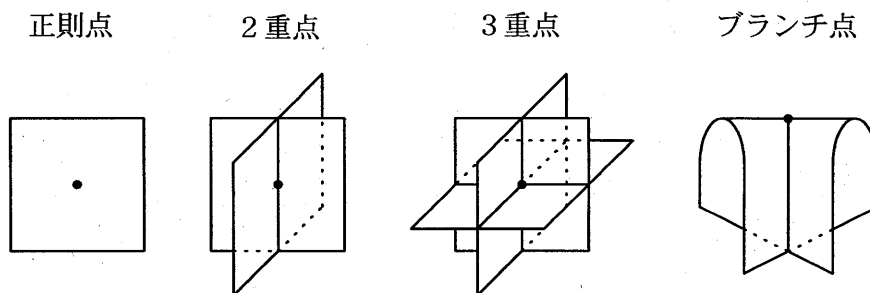


図1

次のことが一般的に知られている。

定理 1 (CS) 任意の *surface-link* F は \mathbb{R}^4 の *isotopy* で動かすことで *generic* になる。

F が向きづけ可能なときは、さらに $\pi(F)$ にブランチ点がないようにできる。

定義 3 *surface-link* F のブランチ点、2重点、3重点の集合を $\Gamma(F)$ と表す。

定義 4 *surface-link* F が *pseudo-ribbon* であるとは、 $\Gamma(F)$ が2重点のみからなることをいう。

F を *pseudo-ribbon surface link* とすると、 $\Gamma(F)$ は \mathbb{R}^3 に disjoint に埋め込まれたいくつかの circle になっている。これらを F の *crossing circle* と呼び、その数を $n(F)$ と表す。

$\pi|_F : F \rightarrow \mathbb{R}^3$ を π の F への制限、 C を任意の *crossing circle* とする。 $(\pi|_F)^{-1}(C)$ は2つの circle になる。それらを C^1, C^2 とし、 \mathbb{R}^4 内で座標軸 t に関して C^1 より C^2 が上になっているとする。このとき、 C^1 の F 内での正則近傍 A を取り、 $\pi(F)$ から $\pi(A)$ を取り除く。この操作をすべての *crossing circle* で行い、上下の情報を入れる。

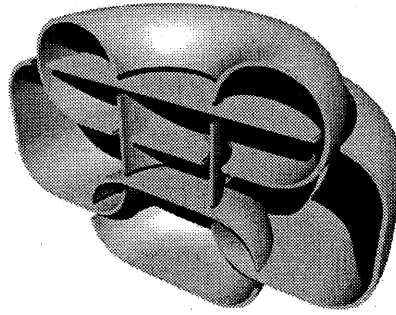
定義 5 *pseudo-ribbon surface link* F に対し、 $\pi(F)$ に各 *crossing circle* での上下の情報を加えたものを射影図という。

また、 F と同値なすべての *pseudo-ribbon surface link* の中での *crossing circle* の最小数を F の *crossing number* と呼び、 $c(F)$ とあらわす。

この論文では F が *pseudo-ribbon* でいくつかの球面から成る場合について (*pseudo-ribbon sphere-link*)、射影図の性質を調べた。また、それらを利用して F が2つの球面から成り、*crossing circle* が6本以下の場合について、分類をした。

2成分の *pseudo-ribbon surface link* F が分離可能であるとは4次元円盤 $D \subset \mathbb{R}^4$ が存在して、 $F \cap \partial D = \emptyset$ 、 $F \cap B \neq \emptyset$ 、 $F - B \neq \emptyset$ となることをいう。 $\Lambda(s), \Lambda(t), \Lambda(s, t)$ を括弧内の文字を変数とするローラン多項式環とする。 F の Alexander invariant を $A(F)$ と表す。また、 F の連結成分になっている *pseudo-ribbon surface-knot* を $K_1(F), K_2(F)$ と表す。

定理 2 2つの球面からなり、*crossing circle* が6本以下の分離しない *pseudo-ribbon sphere-link* は図 2,3,4,5,6 のどれかただ1つと同値である。

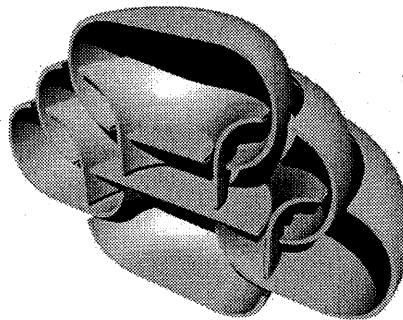


$$A(L_1) = \Lambda(s, t)/(1 - s^2 + s^3) \oplus \Lambda(s, t)/(1 - t) \quad (1)$$

$$A(K_1(L_1)) = \Lambda(s)/(1 - s + s^2) \quad (2)$$

$$A(K_2(L_1)) = 0 \quad (3)$$

图 2 L_1

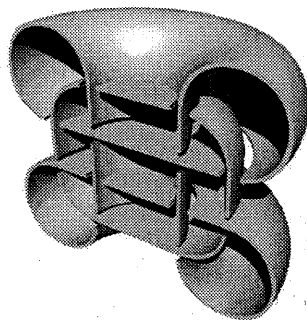


$$A(L_2) = \Lambda(s, t) \quad (4)$$

$$A(K_1(L_2)) = \Lambda(s)/(1 - 3s + s^2) \quad (5)$$

$$A(K_2(L_2)) = 0 \quad (6)$$

图 3 L_2

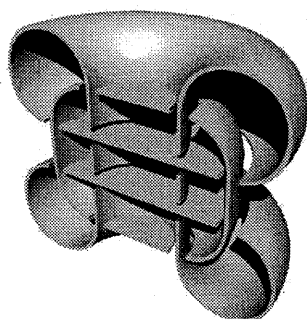


$$A(L_3) = \Lambda(s, t)/(1 - s + s^2) \oplus \Lambda(s, t)/(1 - t)(s - t) \quad (7)$$

$$A(K_1(L_3)) = 0 \quad (8)$$

$$A(K_2(L_3)) = 0 \quad (9)$$

図 4 L_3



$$A(L_4) = \Lambda(s, t)/(1 - s + s^2) \oplus \Lambda(s, t) \quad (10)$$

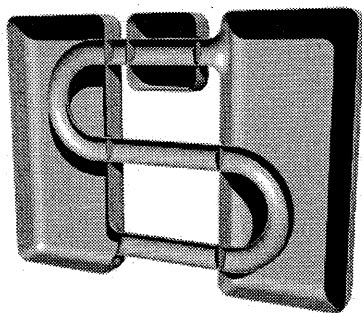
$$A(K_1(L_4)) = 0 \quad (11)$$

$$A(K_2(L_4)) = 0 \quad (12)$$

図 5 L_4

図には射影図の半分だけが描かれている。 L_2, L_5 の link としての Alexander invariant $A(L_2), A(L_5)$ は自明な link のそれと一致している。

F が 1 つの球面から成り、crossing circle が 5 本以下の場合、1 つのトーラスまたは 1 つのクラインボトルで、crossing circle が 3 本以下の場合についてはすでに分類されている。[Ai, Sh1, Sh2]



$$A(L_5) = \Lambda(s, t) \tag{13}$$

$$A(K_1(L_5)) = \Lambda(s)/(1 - 2s) \tag{14}$$

$$A(K_2(L_5)) = 0 \tag{15}$$

図6 L_5

一般の surface-link については、 F が1つの球面で2つ以下の3重点を含む場合は ribbon であることがわかっている。[Sh3]

定理2を証明するために射影図をリストアップする必要がある。そのために pseudo-ribbon sphere-link に対応する graph を定義した。リストアップされた射影図の中から同値なものを取り除いていき、分類を行った。この graph は1次元の絡み目の Gauss word に対応する。