論文審査の結果の要旨

氏名　吉田　享平

3次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^3$に滑らかに埋め込まれた円周S^1（結び目）あるいはそれらの非交和（絡み目）を扱う古典的結び目理論の類似として，4次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^4$に埋め込まれた球面S^2（結び目）あるいはそれらの非交和（絡み目）を扱う理論が近年活発に研究されている．それらの研究において，対象となる結び目あるいは絡み目のリストを作成することは基礎的な重要性を持っている．

古典的な結び目理論については，19世紀のテイト以来，結び目のリストの作成が行われており，すでに，射影図に10個以下の交点が現れるものの分類が完成している．これに引きかえ，$\mathbb{R}^4$のなかの球面結び目や球面絡み目の数え上げに関する研究は，未だにそう多くない．

論文提出者 吉田 享平は，$\mathbb{R}^4$内の2個の球面からなる球面絡み目Fであって，$\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$により射影したとき，像$\pi(F)$が特異性として2重線のみをもつはめ込みになっているようなもの，いわゆる「擬リボン型球面絡み目」(pseudo-ribbon sphere-link)の数え上げを，2重線が6本以下のものについて実行した．2個の成分の絡み目の場合，$\mathbb{R}^4$のなかの3次元単位球面の内側と外側に1つずつ成分を持つ絡み目，あるいはそれに同位な絡み目は「分離型」と呼ばれる．分離型は本質的には成分1つの球面結び目の考察に帰着されるから，絡み目として興味があるのは非分離型の絡み目である．この論文の主定理は次のように述べられる．

定理．2つの球面からなり，$\mathbb{R}^3$への射影像$\pi(F)$が2重線のみの特異性を持ち，しかもそれが6本以下の2重線からなるような非分離型の擬リボン型球面絡み目Fは5つの同位型に分類される．

論文には，それら5つの絡み目の具体的な図が与えられ，それぞれのアレキサンダー不変量も計算されているが，この要旨では省略する．

この分類のための方法は次のようなものである．射影像$\pi(F)$の2重線（n本とする）を$\pi : F \to \pi(F)$によりFに引き戻すとFの上に$2n$本の互いに交わらない円周$\mathcal{C} = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \ldots \sqcup C_{2n}$が得られる．これの双対グラフを$g(F)$とする．すなわち，$g(F)$の頂点は$F - \mathcal{C}$の連結成分であり，$g(F)$の辺は$C_i$であ

る．C_i が 2 つの連結成分の共通の境界となっているとき，C_i に対応する辺により，2 つの連結成分に対応する頂点を結ぶ．C_i 達は $\pi(F)$ の同一の 2 重線に由来するものを対として考えることができて，そのことに対応して，$g(F)$ の辺も 2 つずつ対にして考えることができる．この意味で $g(F)$ は "paired graph" である．さらに，$\mathbb{R}^3 - \pi(F)$ の連結成分は，$\pi(F)$ の面で隣り合うものが違う色になるように白と黒で塗り分けられる．この塗りわけを用いて，$g(F)$ の辺に「向き」を与えることができる．このようにして，球面絡み目 F に oriented paired graph $g(F)$ が対応する．

論文では，擬リボン型球面絡み目から生じる oriented paired graph の形の満たすべき必要十分条件を与えた．また，一つのグラフに対応する擬リボン型球面絡み目の同位類は一意的であることを証明した．これらの結果に基づき，可能性のあるグラフ百十数個（まだ向きと対のないもの）についてコンピュータを援用しつつその上の辺の対と向きの入れ方を調べ上げた．得られたグラフの一つ一つを球面絡み目で実現して異同をしらべ，定理の結論を得たものである．

先行する研究としては，相曽秀昭の修士論文（東京大学 1987 年修士論文）がある．相曽は 5 本以下の 2 重線をもつ球面結び目の分類を行った．相曽もグラフを用いるが，吉田のように実際の球面結び目に対応するグラフの特徴づけにまで到達しておらず，グラフの利用はむしろ補助的であった．吉田の方法はより強力なものになっており，相曽の分類が再現できた．さらに，6 本以上の 2 重線をもつ球面結び目の分類も吉田の方法により原理的に可能である．

以上のように，この論文は擬リボン型球面結び目あるいは球面絡み目の分類のアルゴリズムを与えたものと考えられ，4 次元空間内の球面の位置の研究に大きく寄与するものといわねばならない．

よって，論文提出者 吉田 享平 は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．