論文の内容の要旨

論文題目 On an Optimal Control Problem in Mathematical Finance and Divergence Theorem in Path Spaces
(数理ファイナンスにおける最適制御問題およびパス空間上の発散定理について)

氏 名 石谷 謙介

本論文では確率論における離散近似の手法を応用し, 以下の二つの問題を取り上げ研究を行った.

(1) Optimal execution problem with convex-cone-valued strategies in consideration of market impact.

(2) Integration by parts formulae for Wiener measures on a path space between two curves.

1 Optimal execution problem with convex-cone-valued strategies in consideration of market impact

投資家が大量の危険資産を売却するとき, 価格に影響を与える. そのような影響はマーケット・インパクトと呼ばれ, 数学モデルの一つとして加藤恭により研究がなされた (cf. [1]). 本研究ではこの市場モデルに関連して, 複数の危険資産を保有する投資家の多期間最適執行 (売却) 問題について論じた.

投資家は初期時点 $t=0$ において d 種類の危険資産を $\Phi_i > 0$ $(1 \le i \le d)$ 単位保有しており, 売却期間最終時点 $t=1$ の資産に対して期待効用を最大化する問題を考える. 以下, 主な結果を概説する.

$(B_t)_{0\le t\le 1}$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le 1}, P)$ 上の d_1 次元 $(\mathcal{F}_t)$-Brownian motion とする. 閉凸錐 $F \subset [0,\infty)^d$, $t \in [0,1]$, $\varphi \in \prod_{i=1}^d [0,\Phi_i]$ に対し, F-値許容 (売却) 戦略を

$$\mathcal{A}_t^F(\varphi) := \left\{ (\zeta_r)_{0\le r\le t};\ (\mathcal{F}_r)\text{-発展的可測}, \zeta_r \in F,\ r \in [0,t], \int_0^t \zeta_r dr \le \varphi\ a.s., \sup_{(r,\omega)\in[0,t]\times\Omega} |\zeta_r(\omega)| < \infty \right\}$$

と定める. 非減少連続関数 $h_i : [0,\infty) \to [0,\infty)$ に対し $g_i(x') := \int_0^{x'} h_i(y)dy$, $(1 \le i \le d)$ とおき, インパクト関数を $g(x) := (g_i(x_i))_{i=1}^d, x = (x_i)_{i=1}^d \in [0,\infty)^d$ と定義する.

$D = [0,\infty)^d \times \prod_{i=1}^d [0,\Phi_i] \times [0,\infty)^d$ 上定義された非減少連続関数 u で $m(>0)$ 次の多項式増大度を満たすものを効用関数のクラス $\mathcal{C}_m$ とする.

金利は定数 $R \ge 0$ で定める. 残存売却期間 $t \in [0,1]$, 初期値 $(w,\varphi,s) \in D$ と F-値許容戦略 $(\zeta_r)_{0\le r\le t}$ に対し確率過程の 3 つ組み $\Xi_t(w,\varphi,s;(\zeta_r)_r) := (W_r,\varphi_r,S_r)_{r\le t} \subset D$ は次の SDE の解とする.

$$S_r = s + \int_0^r \hat{\sigma}(S_v)dB_v + \int_0^r \hat{b}(S_v)dv - \int_0^r g(\zeta_v) \circledast S_v dv, \tag{1.1}$$

$$W_r = e^{Rr}w + \int_0^r e^{R(r-v)}\zeta_v \circledast S_v dv,\ \varphi_r = \varphi - \int_0^r \zeta_v dv, \quad (0 \le r \le t). \tag{1.2}$$

ただし $a,b \in \mathbb{R}^d$ に対し $a \circledast b := (a_i b_i)_{i=1}^d$ とおく. 効用関数 $u \in \mathcal{C}_m$ に対し, 連続時間の値関数を

$$V_t^F(w,\varphi,s;u) := \sup_{(\zeta_r)_r \in \mathcal{A}_t^F(\varphi)} E[u(W_t,\varphi_t,S_t)], \quad (W_r,\varphi_r,S_r)_{r\le t} = \Xi_t(w,\varphi,s;(\zeta_r)_r) \tag{1.3}$$

と定義する. まず $I := \{i \in \{1,\ldots,d\}\ ;\ h_i(\infty) < \infty\}$ とおき, 次の条件を仮定する.

$[A_1]$ $\psi \in F$ ならば, $\underline{\psi}^{(I)} := \psi \circledast \underline{1}^{(I)} \in F$ が成立. ただし $\underline{1}^{(I)} := (1_I(i))_{i=1}^d \in \{0,1\}^d$.

以上の設定のもと, 値関数の連続性に関して以下を示した.

定理 1.1 F と I が $[A_1]$ を満たすならば, 各 $u \in \mathcal{C}_m$ に対し $V_t^F(w,\varphi,s;u)$ は $(t,w,\varphi,s) \in (0,1] \times D$ 上連続. さらに $t \downarrow 0$ のとき $V_t^F(w,\varphi,s;u)$ は $(w,\varphi,s) \in D$ に関して広義一様に

$$J^{F,I}u(w,\varphi,s) := \sup_{\psi \in F(\varphi)} u\left(w + H(\psi) \circledast s, \varphi - \underline{\psi}^{(I)}, s \circledast \exp(-h(\infty) \circledast \underline{\psi}^{(I)})\right)$$

に収束する. ただし $0 \times \infty := 0$, $h(\infty) = (h_i(\infty))_{i=1}^d$, $H_i(\psi_i) = \int_0^{\psi_i} \exp(-h_i(\infty)x)dx$ かつ $H(\psi) = (H_i(\psi_i))_{i=1}^d$ と定める.

取引時刻を $0, 1/n, \ldots, (n-1)/n$ と考え, $k \in \{1,\ldots,n\}$ と $\varphi \in \prod_{i=1}^d [0,\Phi_i]$ に対し離散時間モデルの F-値許容戦略を

$$\mathcal{A}_k^{(n),F}(\varphi) := \left\{(\psi_l^{(n)})_{l=0}^{k-1} \subset F;\ \psi_l^{(n)} \text{ は } \mathcal{F}_{l/n} \text{ 可測}\ ,\ \sum_{l=0}^{k-1} \psi_l^{(n)} \le \varphi\ a.s.\right\}$$

と定める. またインパクト関数 $g^{(n)}(x) = (g_i^{(n)}(x_i))_{i=1}^d$ を適切に定めて, 次を仮定する.

$$[A_2] \quad \varepsilon_n = \max_{1\le i\le d} \sup_{\psi \in [0,\Phi_i]} \left| \frac{d}{d\psi} g_i^{(n)}(\psi) - h_i(n\psi) \right| \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

各 $(w,\varphi,s) \in D$ と $(\psi_l^{(n)})_{l=0}^{k-1} \in \mathcal{A}_k^{(n),F}(\varphi)$ に対し, $(W_l^{(n)}, \varphi_l^{(n)}, S_l^{(n)})_{l=0}^k$ を以下で帰納的に定める. 初期値は $S_0^{(n)} = s$ とする. l/n 時における価格 $S_l^{(n)} = (S_l^{(n),i})_{i=1}^d$ と log-price $X_l^{(n)} = \log S_l^{(n)}$ に対し, $\psi_l^{(n)}$ の売却後, log-price は $X_l^{(n)} - g^{(n)}(\psi_l^{(n)})$ に変化し, l/n 時に得る cash は $\psi_l^{(n)} \circledast S_l^{(n)} \circledast \exp(-g^{(n)}(\psi_l^{(n)}))$ であるとする. さらに $(l+1)/n$ 時において, $X_{l+1}^{(n)}$ と $S_{l+1}^{(n)}$ は次で与えられるとする.

$$X_{l+1}^{(n)} = Y\left(\frac{l+1}{n};\ \frac{l}{n}, X_l^{(n)} - g^{(n)}(\psi_l^{(n)})\right), \quad S_{l+1}^{(n)} = \exp(X_{l+1}^{(n)}).$$

ここで $(Y(t;\ r,\ x))_{t\ge r}$ は以下の SDE の解とする.

$$\begin{cases} dY(t;\ r,\ x) = \sigma(Y(t;\ r,\ x))dB_t + b(Y(t;\ r,\ x))dt, \\ Y(r;\ r,\ x) = x. \end{cases}$$

一方, $(W_l^{(n)})_{l=0}^k$ と $(\varphi_l^{(n)})_{l=0}^k$ は初期条件 $(W_0^{(n)}, \varphi_0^{(n)}) = (w, \varphi)$ と次の関係式 $\varphi_{l+1}^{(n)} = \varphi_l^{(n)} - \psi_l^{(n)}$, $W_{l+1}^{(n)} = e^{R/n} W_l^{(n)} + \psi_l^{(n)} \circledast S_l^{(n)} \circledast \exp(-g^{(n)}(\psi_l^{(n)}))$, $(l = 0, \ldots, k-1)$ により帰納的に定義する. この 3 つ組み $(W_l^{(n)}, \varphi_l^{(n)}, S_l^{(n)})_{l=0}^k$ を $\Xi_k^{(n)}(w, \varphi, s; (\psi_l^{(n)})_l)$ と表す.

効用関数 $u \in \mathcal{C}_m$ に対し離散時間の値関数 $V_k^{(n),F}(w, \varphi, s; u)$ を

$$V_k^{(n),F}(w, \varphi, s; u) = \sup_{(\psi_l^{(n)})_{l=0}^{k-1} \in \mathcal{A}_k^{(n),F}(\varphi)} E[u(W_k^{(n)}, \varphi_k^{(n)}, S_k^{(n)})]$$

と定める. ただし $(W_l^{(n)}, \varphi_l^{(n)}, S_l^{(n)})_{l=0}^k = \Xi_k^{(n)}(w, \varphi, s; (\psi_l^{(n)})_l)$ とする.

$\tilde{\psi}_i^{(n)} := \sup\left\{\psi \in [0, \Phi_i]\,;\ \psi \frac{d}{d\psi} g_i^{(n)}(\psi) \leq 1\right\}$ $(i = 1, \ldots, d)$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し閉部分集合 $F_n \subset F$ が存在して次の条件 $[A_3]$, $[A_4]$, $[A_5]$ が成り立つと仮定する.

$[A_3]$ 各 $\psi \in F \setminus F_n$ に対し, 区分的に C^1 級の連続関数 $c = (c_i)_{i=1}^d : [0,1] \to [0,\infty)^d$ で, $c(0) = \psi, c(1) \in F_n$ かつ

$$\frac{d}{dt} c_i(t) \leq 0 \text{ on } [0,1], \quad \frac{d}{dt} c_i(t) = 0 \text{ on } \left\{t \in [0,1]; c_i(t) \leq \tilde{\psi}_i^{(n)}\right\} \qquad (i = 1, \ldots, d)$$

を満たすものが存在する.

$[A_4]$ $\overline{\lim}_{n\to\infty} \max_{i=1,\ldots,d} \sup_{\psi \in F_n(\Phi)} g_i^{(n)}(\psi_i) < \infty$.

$[A_5]$ $i \in I^c$ に対し $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{\psi \in F_n(\Phi)} \left(\frac{d}{d\psi} g_i^{(n)}\right)(\psi_i) = 0$.

以上の設定のもとで離散時間の値関数 $V_k^{(n),F}(w, \varphi, s; u)$ の収束について次の定理を得た.

定理 1.2 $[A_3]$, $[A_4]$, $[A_5]$ を満たす $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の存在を仮定する. このとき $(w, \varphi, s) \in D$, $u \in \mathcal{C}_m$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} V_{[nt]}^{(n),F}(w, \varphi, s; u) = V_t^F(w, \varphi, s; u), \ t \in [0,1].$$

この結果を用いることにより, 非線形作用素 $T_t^F : \mathcal{C}_m \to \mathcal{C}_m$ を $T_t^F u(w, \varphi, s) = V_t^F(w, \varphi, s; u)$ と定めるとき $\{T_t^F;\ t \in [0,1]\}$ が半群となることが示せる. この半群性と定理 1.1 の連続性をもとに, 伊藤の公式を用いて, 値関数が適切な Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式の粘性優解となることを確かめた.

$d = d_1 = 1$, $R = 0$, $F = [0, \infty)$ の場合は定理 1.1, 定理 1.2 は [1] の結果として知られている. 本研究は多次元の場合について, 1 次元と同様の結果を得た.

2 Integration by parts formulae for Wiener measures on a path space between two curves

2 曲線の間のパス空間に制限された Wiener 測度に対する部分積分公式について研究を行い, 境界測度を 2 曲線の曲率を用いて特徴づけた. ここで, パス空間とは $[0,1]$ 上で定義された実数値連続関数の空間 $\mathcal{C} \equiv C([0,1])$ である. 2 曲線 $f^{\pm} \in \mathcal{C}$ は条件

$$f^-(t) < f^+(t) \quad \text{for every} \quad t \in [0,1] \tag{2.1}$$

を満たすものとし, $f^{\pm}$ の間のパス空間を $K(f^-, f^+) = \{x \in \mathcal{C}; f^-(t) \leq x(t) \leq f^+(t) \text{ for every } t \in [0,1]\}$ とする. $K(f^-, f^+)$ 上でピン止め Brown 運動の法則 $P_{a,b}$ に対する部分積分公式について議論を行った.

$f \in \mathcal{C}^{r_1,r_2}$ に対し, $K_+^{r_1,r_2}(f) = \{x \in \mathcal{C}^{r_1,r_2}; x(t) \leq f(t) \text{ for every } t \in [r_1, r_2]\}$ と定め, $K_-^{r_1,r_2}(f)$ は条件を $x(t) \geq f(t)$ で置き換えて定義する. 次に(2.1) を満たす $f^{\pm} \in \mathcal{C}^{r_1,r_2}$ に対し $K^{r_1,r_2} \equiv$

$K^{r_1,r_2}(f^-,f^+) = K_+^{r_1,r_2}(f^+) \cap K_-^{r_1,r_2}(f^-)$ と定める. $P_{a,b}^{r_1,r_2}$ を $x(r_1)=a, x(r_2)=b$ なる $C^{r_1,r_2} \equiv C([r_1,r_2])$ 上の pinned Wiener measure とし, 条件付き確率 $P_{a,b;f^-,f^+}^{r_1,r_2}(\cdot) = P_{a,b}^{r_1,r_2}(\cdot|K^{r_1,r_2})$ 及び $P_{a,b;f,\pm}^{r_1,r_2}(\cdot) = P_{a,b}^{r_1,r_2}(\cdot|K_\pm^{r_1,r_2}(f))$ を定義する.

$\alpha,\beta \geq 0$, $f \in W^{1,2+}([r_1,r_2]) = \bigcup_{p>2} W^{1,p}([r_1,r_2])$ に対し

$$\bar{c}_{\alpha,\beta;\pm}^{r_1,r_2}(f) := \frac{2|\alpha-\beta|}{r_2-r_1}\frac{E^{P_{\alpha,\beta}^{r_1,r_2;+}}[M_{r_1,r_2}(\pm f)]}{E^{P_{\alpha,\beta}^{r_1,r_2}}[M_{r_1,r_2}(\pm f)]}$$

と定める. ここで $P_{\alpha,\beta}^{r_1,r_2;+} \equiv P_{\alpha,\beta;0,-}^{r_1,r_2}$ は $x(r_1)=\alpha$, $x(r_2)=\beta$ なる 3 次元 Bessel bridge であり, $M_{r_1,r_2}(f)$ は Cameron-Martin density $M_{r_1,r_2}(f) := \exp\left\{\int_{r_1}^{r_2} f'(t)\,dx(t) - \frac{1}{2}\int_{r_1}^{r_2} f'(t)^2\,dt\right\}$ である. このとき $f' \in \bigcup_{p>2} L^p([r_1,r_2])$ に対し $\int_{r_1}^{r_2} f'(t)dx(t)$ は $x(t)$ に関する Wiener 積分とする. また熱核 $p(r,a,c) = e^{-(a-c)^2/2r}/\sqrt{2\pi r}$, $0<r<1$ に対し $p(r,a,b;c) := p(r,a,c)p(1-r,c,b)/p(1,a,b)$ と定める.

$H := L^2([0,1])$ を Hilbert 空間とし, $\varphi : H \to \mathbb{R}$ は 1 回連続的 Fréchet 微分可能な関数であり, その各階の導関数は有界とする. このとき Fréchet 微分を以下で表す.

$$\nabla_h\varphi(x) \equiv \langle\nabla\varphi, h\rangle_H = \frac{d}{d\epsilon}\varphi(x+\epsilon h)\bigg|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\{\varphi(x+\epsilon h) - \varphi(x)\}, \quad h \in H.$$

各 $0<r<1$ と $f \in C$ に対し, $f_L \equiv f_L^r \in C^{0,r}$ と $f_R \equiv f_R^r \in C^{r,1}$ は f をそれぞれ $[0,r]$, $[r,1]$ 上への制限とする. 次の定理を示した.

定理 2.1 $f^\pm \in W^{1,2+}([0,1])$, $f^-(0) < a < f^+(0)$, $f^-(1) < b < f^+(1)$ とする. $h \in H_0^1((0,1))$ に対し

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{K(f^-,f^+)}\langle\nabla\varphi,h\rangle_H\,P_{a,b}(dx) &= \textstyle\int_{K(f^-,f^+)}\varphi(x)\int_0^1 h'(t)dx(t)\,P_{a,b}(dx) \\ &\quad \textstyle+ \int_0^1 h(r)\nu_{a,b}^+(r)dr E_{a,b}^{+;r}[\varphi(x_L,x_R)] - \int_0^1 h(r)\nu_{a,b}^-(r)dr E_{a,b}^{-;r}[\varphi(x_L,x_R)]\end{aligned} \tag{2.2}$$

が成り立つ. ここで, $E_{a,b}^{\pm,r}[\cdot]$ は $P_{a,f^\pm(r);f_L^-,f_L^+}^{0,r}(dx_L) \otimes P_{f^\pm(r),b;f_R^-,f_R^+}^{r,1}(dx_R)$ に関する期待値とし,

$$\begin{aligned}\nu_{a,b}^\pm(r) := &\ \tfrac{1}{2}p(r,a,b;f^\pm(r)) \times \bar{c}_{|a-f^\pm(0)|,0;\pm}^{0,r}(f_L^\pm)P_{a,f^\pm(r);f_L^\pm,\pm}^{0,r}(K_\mp^{0,r}(f_L^\mp)) \\ &\times\bar{c}_{0,|b-f^\pm(1)|;\pm}^{r,1}(f_R^\pm)P_{f^\pm(r),b;f_R^\pm,\pm}^{r,1}(K_\mp^{r,1}(f_R^\mp))\end{aligned}$$

とおく. また $H_0^1((0,1))$ は $C_c^\infty((0,1)) \equiv \{h \in C^\infty([0,1])$ *having compact supports in* $(0,1)\}$ の *Sobolev* 空間 $H^1([0,1]) \equiv W^{1,2}([0,1])$ における閉包とする.

この結果より境界測度のサポートは上下の曲線 $f^\pm$ の間を動くパスのうち一度だけ一方の曲線 $f^\pm$ にヒットする経路の集合となることがわかり, 曲線 $f^\pm$ の曲率が $\nu_{a,b}^\pm$ に与える影響も解明できた.

$f^- = \text{constant}$, $f^+ = \infty$ かつ $a=b$ の場合は Zambotti [2] が (2.2) を示している. 彼は Biane の公式などを本質的に用いて証明を行った. 一方, 我々の一般的な設定ではこの手法を用いた証明は困難であったため, ピン止め Brown 運動を折れ線近似することで問題を有限次元の部分積分の計算に帰着させた.

また $K(f^-,f^+)$ に制限した Brown 運動の法則 P_a についても, 折れ線近似の方法を用いて定理 2.1 と同様の結果を得た. この部分は舟木直久教授との共同研究である.

参考文献

[1] T. Kato, *Optimal Execution Problem with Market Impact*, in preparation.

[2] L. Zambotti, *Integration by parts formulae on convex sets of paths and applications to SPDEs with reflection*, Probab. Theory Relat. Fields, **123** (2002), pp. 579–600.