論文審査の結果の要旨

氏名　石谷謙介

論文提出者石谷謙介は、数理ファイナンスにおける最適制御問題およびパス空間上のWiener 測度に関する部分積分公式について、離散近似という共通の視点に基づき確率論的な考察を行った。

まず論文の前半で、石谷は数理ファイナンスにおける最適制御問題を論じた。ある投資家が大量の危険資産を所有している状況の下で、損失を可能な限り小さく抑えながら最適にそれらを売却するには、どのように行動すればよいかという問題を考える。ここでいう投資家とは一般には個人ではなく法人であることが多い。このような問題を考えるにあたって注意しなければならない点は、売却量が非常に多いために、売却行為自体が株価等の市場価格に影響を与えることである。このような影響はマーケット・インパクトとよばれ、危険資産が一種類の場合に、対応する数理モデルが加藤恭氏により提唱され研究がなされている。本論文では、危険資産が複数の場合に同様の問題を論じた。

投資家が d 種類の危険資産を所有するとき、それらの価格は d 次元確率微分方程式によって記述される。この確率微分方程式には、投資家が資産を売却することにより価格を押し下げる要因を表す項が含まれる。このような設定の下で、売却戦略を許容される範囲内でとったとして、ある一定時刻後の期待効用を表す効用関数を最大化する問題を考える。この効用関数の最大値のことを値関数とよぶ。石谷が考察したのは、特に、瞬間的な売却戦略が与えられた凸錐に入るという条件の下での最適制御問題である。

論文の前半の結果をまとめれば、以下の通りである。

(1) ある仮定 $[A_1]$ の下で、値関数の連続性を示した。

(2) 時間を離散化したモデルを考え、離散時間の値関数が適当な連続極限の下で連続時間の値関数に収束することを、ある仮定 $[A_3]$～$[A_5]$ の下で示した。

(3) 上記の結果から連続時間の値関数は Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式の粘性優解になることがわかる。特に、瞬間的な売却戦略が有界であれば、これは同時に粘性劣解でもあり、したがって粘性解であることが証明される。

論文の後半では、2曲線の間に挟まれる領域内にパス空間を制限して Wiener 測度を考え、対応する部分積分公式を導出した。これは、よく知られた Green-Stokes の公式の無限次元版に相当するものである。制限されたパス空間の位相的境界は、2曲線のいずれかに1回以上触れるパスの全体であるが、部分積分公式において現れる境界測度は

2 曲線のいずれかにちょうど 1 回だけ触れるパスの集合上に台をもつことが示される。論文では、境界測度の具体形を求めることに成功している。より詳しく述べれば、まずパスが 2 曲線のいずれかに触れる点の分布を与えるウェイトを求め、さらに触れる点を指定したときのパスの確率が、その点以外で 2 曲線間に留まり、かつ指定した点のみで曲線に触れるようにもとの Wiener 測度を条件付けて得られる条件付確率になることを示している。証明では、Brown 運動をランダムウォークにより近似し、有限次元の部分積分公式を書き下した後に、その極限として無限次元空間における部分積分公式を得るという方法が用いられている。また、主定理に現れる条件付確率は下に 1 曲線のみが置かれかつそれが定数レベルにあるときには、Brownian meander あるいはピン留め 3 次元 Bessel 過程になることが知られている。一般の曲線の場合には Cameron-Martin 公式を用いた表示が可能であり、その際上記の確率過程に関する Wiener 積分が必要になる。論文ではそのような Wiener 積分の構成についても論じている。本論文で得られた結果は、2 曲線のいずれかに接触したときに反射により解が 2 曲線間に留まるように修正を加えた確率偏微分方程式への応用をもつ。

これらはいずれも重要な結果であり、数理ファイナンスにおける最適制御問題およびパス空間上の発散定理に対する新しい視点を開くものとして大変興味深い。

以上のような理由により、論文提出者石谷謙介は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。