論文の内容の要旨

論文の題目　Inverse problems for plate equations,
parabolic equations and Schrödinger equations

(薄板の運動方程式と放物型方程式と
Schrödinger 方程式に対する逆問題)

氏名：袁 崗華

本論文において種々の板の方程式、放物型方程式ならびに Schrödinger 方程式の係数や外力項を有限回の観測データによって決定する逆問題の一意性と安定性を考察した。さらに非線形項をもつ薄板の方程式に関する完全可制御性と滑らかでないポテンシャルを持つ Schrödinger 方程式に対する観測不等式を確立した。証明は Carleman 評価ならびに Bukhgeim と Klibanov の方法に基づく。Carleman 評価とは偏微分方程式の解に対する適切な重み関数による L^2-不等式であり、十分大きな正のパラメータに関して一様に成り立つものであって、一意接続性を証明するために楕円型方程式に対して Carleman によって証明された。Bukhgeim と Klibanov は、時間に関する積分項を持つ偏微分方程式の一意接続性の問題に変換することによって、単独 2 階の偏微分方程式の逆問題の一意性を始めて解決した。彼らの方法論のためには考察している偏微分方程式に対する Carleman 評価をまず確立しなくてはならない。さらに未知係数が複数個ある場合にはもとの偏微分方程式とは別個に付随的に Carleman 評価を示さなくてはならない。また、係数の滑らかさを緩和することは、特に Schrödinger 方程式に関しては物理的にも意味あることであるが、その場合に Carleman 評価を示すことには技術的な困難がある。本論文ではこれらの困難を克服して、上に述べた諸問題を解決した。

以下、$n \geq 1$, ただし板の方程式の場合は $n = 2$ とし、$\Omega \subset R^n$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域で、部分領域 ω は $\partial\Omega \subset \partial\omega$ を満たすとし、$Q = (0,T) \times \Omega$, $Q_T = (-T,T)$ とし、$\nu(x)$ は x における $\partial\Omega$ の単位外向き法線ベクトルを表す。第４、５章を除いて $T > 0$ は任意にとって固定する。x_j は $x \in \Omega$ の j-成分で $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\nabla = (\partial_1, \cdots, \partial_n)$, $\partial_\nu = \nabla \cdot \nu$, $\triangle = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$ とおく。方程式の主要部に現れる x に依存する ρ, λ, μ, K などの係数は適切に定義されたある有界集合に限定されているものとする。

第１章. Kirchhoff の板の方程式 (1) を考察した。すなわち、飛行機の翼のような薄板が運動してい

る場合に、つり合いの位置からの変位を表す $y(t,x)$ は

$$\rho(x)\partial_t^2 y(t,x)+(\lambda(x)+\mu(x))\triangle^2 y(t,x)+2\nabla(\lambda+\mu)(x)\cdot\nabla(\triangle y(t,x)) \tag{1}$$
$$+\triangle(\lambda+\mu)(x)\triangle y(t,x)+2(\partial_1\partial_2\mu)(x)\partial_1\partial_2 y(t,x)$$
$$-(\partial_1^2\mu)(x)\partial_2^2 y(t,x)-(\partial_2^2\mu)(x)\partial_1^2 y(t,x)=H(t,x),\quad (t,x)\in Q,$$

を満たす。さらに適切な初期条件ならびに境界条件を満たす解 y を考えた。初期変位 $y(0,x)$ を ℓ 回適切に変えて対応する解の ℓ 組の過剰決定な境界データ $(\partial_\nu^k y|_{(0,T)\times\partial\Omega})_{0\le k\le 3}$ から、板の密度 $\rho(x)$、*Lamé* 係数 $\lambda(x),\mu(x)$ を決定する逆問題の安定性を証明した. 密度が既知の場合は、$\ell=6$ とし、$\det(\triangle^2 a_j,\partial_1(\triangle a_j),\partial_2(\triangle a_j),\ \partial_1^2 a_j,\partial_2^2 a_j,\partial_1\partial_2 a_j)_{1\le j\le 6}(x)\neq 0,\ x\in\overline{\Omega}$ を満たすように初期変位 a_j, $1\le j\le 6$ を選択するならば、本逆問題に対して適当な Sobolev 空間のノルムに関して Lipschitz 連続性が成り立つことを証明した。特に、初期変位を適当な 2 次関数にとると、$\ell=2$ で逆問題について Lipschitz 連続性を示すことができた。密度も未知の場合には、$\ell=7$ とし初期変位 a_j とともに外力 H_j, $1\le j\le 7$ を

$$\det(\triangle^2 a_j,\partial_1(\triangle a_j),\partial_2(\triangle a_j),\partial_1^2 a_j,\partial_2^2 a_j,\partial_1\partial_2 a_j,H_j(0,\cdot))_{1\le j\le 7}(x)\neq 0,\quad x\in\overline{\Omega}$$

となるように選択するとして、ρ,λ,μ を決定する逆問題に関して Lipschitz 安定性を証明した。特に初期変位を 2 次関数で適切に選ぶと $\ell=3$ で Lipschitz 連続性が成り立つことも示した。

第 2 章. 点ソース $\sigma(t)\delta_A(x)$ を持つ Kirchhoff の板の方程式 (1) を適当な初期条件と境界条件の下で考察した。ここで、$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}\in\Omega^m$, $\delta_A=\sum_{j=1}^{m}\delta_{a_j}$ であって, δ_{a_j} は a_j に台をもつ Dirac のデルタ関数である。$\sigma(0)\neq 0$ を仮定する。次の逆問題の一意性を証明した：与えられた σ, ρ, λ, μ に対して、ソース項 $A^{(k)}=\{a_1^{(k)},a_2^{(k)},\cdots,a_m^{(k)}\}\in\Omega^m$, $k=1,2$ に対応する解 $y(A^{(k)})$ を考える。もし、$y(A^{(2)})(t,x)=y(A^{(1)})(t,x)$, $(t,x)\in(0,T)\times\omega$ ならば、必要に応じて要素を適当に並べ替えるとして $A^{(1)}=A^{(2)}$ である。

第 3 章. 適切な初期条件と境界条件の下で、一様な材質の板の方程式

$$\partial_t^2 z(t,x)+\triangle^2 z(t,x)=q(t,x)z(t,x),(t,x)\in Q,$$

を考察した。ここで、$q\in L^\infty(Q)$, $z_0\in L^2(\Omega)$, $z_1\in(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))'$ とする。但し、$(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))'$ は $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ の双対空間をあらわす。このような板の方程式に対して、H^{-1} 空間における Carleman 評価に基づいて、L^2 空間における観測不等式を証明した：

$$\|\partial_t z(0,\cdot)\|^2_{(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))'}+\|z(0,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}\le Ce^{C(1+r+r^2)}\int_0^T\int_\omega |z|^2\,dxdt. \tag{2}$$

ここで、$r=\|q\|_{L^\infty(Q)}$ とおき、定数 C は r ならびに $z(0,\cdot),\partial_t z(0,\cdot)$ に依存しない。次に $\lim_{s\longrightarrow\infty}\frac{f(s)}{s\sqrt{\log|s|}}=0$ を仮定し、χ_ω を ω の特性関数とする。このとき非線形項を持つ板の方程式

$$\partial_t^2 y+\triangle^2 y+f(y)=\chi_\omega(x)u(t,x),(t,x)\in Q,$$

に対して、観測不等式 (2) を利用して、完全可制御性を証明した。

第４章. 薄板の運動を記述する別のモデルである Mindlin-Timoshenko の板の方程式に対して、初期値ならびに境界値を適切に選んで、対応する解の適切な部分境界におけるデータを観測することによって *Lamé* 係数と剛性率を決定する逆問題に対して、$T>0$ が十分大きいとして Lipschitz 連続性を証明した。

第５章. 板の熱弾性方程式に対して振動源と熱源を決定する逆問題を考察した：

$$\begin{cases} \partial_t^2 y(t,x) - \lambda\triangle\partial_t^2 y(t,x) + \triangle^2 y(t,x) + \rho\triangle\eta(t,x) = F(x)R(t,x), \\ \varsigma\partial_t\eta(t,x) - \mu\triangle\eta(t,x) - \rho\triangle\partial_t y(t,x) + c\eta(t,x) = H(x)G(t,x), \quad (t,x)\in Q, \end{cases} \tag{3}$$

ここで、θ は板の温度、y は変位を表している。$0<t_1<\theta<t_2<T$ とおく。R, H が与えられたとして、$(y(F,H)(\cdot,\cdot),\eta(F,H)(\cdot,\cdot))$ が (3) と適切な初期条件と境界条件を満たすとする。適当な部分境界 Γ_0 を固定して、観測データ $(y(F,H)(\theta,\cdot),\eta(F,H)(\theta,\cdot))$ と $(y(F,H)(\cdot,\cdot),\eta(F,H)(\cdot,\cdot))|_{(t_1,t_2)\times\Gamma_0}$ から、F と H を決定する逆問題を考察した。二つのパラメーターを含む Carleman 評価を確立して、十分大きな $T>0$ に対して Hölder 連続性を証明した。

第６章. 次の放物型方程式の最高次の係数を同時に決定する逆問題を考察した：

$$\partial_t y(t,x) - \sum_{i,j=1}^n \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i y(t,x)) = h(t,x), \quad (t,x)\in Q. \tag{4}$$

ただし、$0<t_1<\theta<t_2<T$ であって、$\Gamma_0\subset\partial\Omega$ は任意の部分境界とし、$y(\{a_{ij}\},h)(\cdot,\cdot)$ は (4) と適当な初期条件と Dirichlet 境界条件を満たすとする。このとき、h を ℓ 回選んで (すなわち h_k, $1\le k\le\ell$) $y(\{a_{ij}\},h_k)(\theta,\cdot)$ と $\partial_\nu y(\{a_{ij}\},h_k)|_{(t_1,t_2)\times\Gamma_0}$ を観測することによって、$\frac{n(n+1)}{2}$ 個の係数 $\{a_{ij}\}$ を決定する逆問題を考えた。本逆問題に対して、適切な h_k を $\frac{n(n+3)}{2}$ 回選んで Lipschitz 連続性を証明した。

第７章. 一般化された Schrödinger 方程式：

$$(Pv)(t,x) = \sqrt{-1}\partial_t v(t,x) + g_1(t,x)\triangle v(t,x) + \sum_{j=1}^n r_{1j}(t,x)\partial_j v(t,x) + \sum_{j=1}^n \int_0^t r_{2j}(x,t,\tau)\partial_j v(x,\tau)d\tau$$

を考えた。以下、$\frac{3}{4}<s\le 1$, $0<T_1<T$、$\gamma>\max\{n,2\}$ とし、$\Omega^0\subset\Omega$ は $\overline{\Omega^0}\subset\Omega$ を満たす。λ と β を適当な定数に選んで $\phi(t,x)=e^{\lambda(d(x)-\beta t^2)}$ とおく。適当な条件を満たす滑らかな g_1, r_{1j}, r_{2j} に対して、次の Carleman 評価を証明した：ある定数 $C>0$ が存在して、十分大きいすべての $\tau>0$ と $\mathrm{supp}u\in\Omega^0\times(-T_1,T_1)$ なるすべての $u\in L^2(-T,T;H^{1-s}(\Omega))$ に対して

$$\tau\int_{-T}^T \|ue^{\tau\phi}\|^2_{H^{1-s}(\Omega)}dt \le C\int_{-T}^T \|e^{\tau\phi}Pu\|^2_{H^{-s}(\Omega)}dt$$

が成り立つ。この Carleman 評価を利用して、ポテンシャル $q\in L^\gamma(\Omega)$ を持つ Schrödinger 方程式

$$\sqrt{-1}\partial_t y(t,x) + \mathrm{div}\,(b(x)\nabla y(t,x)) - q(x)y(t,x) = 0, \quad (t,x)\in Q_T,$$

に関して q の決定と L^2 空間における観測不等式を証明した。

第８章. $q\in L^\infty(Q_T)$ を持つ Schrödinger 方程式に対して L^2 空間における (2) と類似の観測不等式を証明した。ここでポテンシャルは時間にも依存し第７章におけるような滑らかさの条件は仮定していない。