論文審査の結果の要旨

氏名：　袁 崗華

袁 崗華氏は、薄板の方程式、放物型方程式ならびにシュレーディンガー方程式に現れる空間変数に依存する物理係数や外力項を境界または部分領域における観測および固定された時刻における空間方向の観測によって決定するという有限回の観測データによる逆問題について、一意性ならびに安定性を考察した。さらに非線形項を持つ薄板の方程式に関する完全可制御性と滑らかでないポテンシャルを持つシュレーディンガー方程式に対する観測不等式を確立した。対象とされた方程式のうち薄板の方程式に関しては、有限回の観測データによる逆問題の結果がなく、他の方程式についても限られた場合にしか研究がなされていなかった。同氏の方法論はブフゲイムークリバフの方法論に基づくものであるが、新たにカーレマン評価とよばれる重み付き不等式を確立する必要があり、この部分も本論文における主要な成果である。以下、各章ごとに内容を記述し審査結果を述べる。

第１章において、材質が一様でなく場所によって変化する薄板に対する古典的なキルヒホッフの方程式を適切な境界条件と初期条件の下に考察した。物理係数としては空間変数に依存する２つのラメ係数と密度があり、これらの係数を初期条件を適切に ℓ 回変えて得られる変位の境界での観測データから決定する逆問題に関して、物理的にも合理的な許容集合の範囲内でリプシッツ連続性を証明した。最小の観測回数による成果としては $\ell=2$ として２次関数で与えられる初期変位を加えた場合に２つのラメ係数を決定する際のリプシッツ連続性がある。しかも初期変位のこのような選択も実用的に容易である。本章だけではなく第２，３章でも基礎となるカーレマン評価はシュレーディンガー方程式のカーレマン評価を巧みに組み合わせたものであり、逆問題への適用の着想とともに特に独自性が認められる。

第２章において、第１章で考察したキルヒホッフの薄板方程式に対して有限個の点に集中した外力が加わった場合に、それらの位置を境界近くの部分領域における変位の時間変化によって決定する逆問題について一意性を証明した。

第３章においてキルヒホッフの薄板方程式に関して指数 -1 をもつソボレフ空間における観測方程式と呼ばれるエネルギー評価式を示し、与えられた時刻で系が与えられた状態を満足するように、部分領域における制御入力を決定するという完全可制御の問題を半線形性に関する緩和された条件に下で確立した。

第４章において、薄板の振動を記述する第二のモデルであるミンドリンーティモシェンコ方程式を考察し、空間変数に依存する２つのラメ係数と剛性率を決定する逆問題を第１章と同様に定式化し、リプシッツ連続性を証明した。ミンドリンーティモシェンコ方程式は未知関数に関して最高階の偏導関数が連立された方程式系であり、カーレマン評価の確立は単独の関数に関するキルヒホッフの薄板方程式と異なり別種の困難さがあるが、袁氏は弾性波のＰ波とＳ波への分解という古典的なアイデアも援用してそれを克服した。

第５章においてを薄板の振動を記述する第三のモデルである熱弾性方程式を考察した。これは、熱方程式と板の方程式が組み合わされた連立偏微分方程式である。熱弾性方程式に働いている外部振動源と熱源を境界観測から決定する逆問題に関してヘルダー連続性を証明した。薄板の支配方程式として熱弾性方程式は重要であるにも関わらず、逆問題の数学解析の結果は皆無であり本結果は高く評価できる。

第６章においては、物性が場所だけではなく方向にも依存する異方性媒質における熱伝導を記述する放物型方程式：

$$\partial_t y(t,x) - \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i y(t,x)) = h(t,x), \quad 0 < t < T,\, x \in \Omega$$

を考察した。異方性のために方程式の主要部は $\frac{n(n+1)}{2}$ 個の係数を含む。熱源 h を適切に選んで時刻 $\theta(>0)$ における温度分布 $u(\theta,x)$, $x \in \Omega$ と境界 $\partial\Omega \times (0,T)$ でのコーシー・データを観測して $\frac{n(n+1)}{2}$ 個の全ての係数 a_{ij} を決定する逆問題を考察した。熱源を $\frac{n(n+1)^2}{2}$ 回適切に選んで対応して得られる観測データによるリプシッツ連続性を本逆問題に対して証明した。さらに逆問題におけるリプシッツ連続性のための観測の回数を $\frac{n(n+3)}{2}$ まで減らすことができることを証明した。放物型方程式に関する対応する逆問題は等方性 $a_{ij}=0$ $(i \neq j)$ かつ $a_{ii}(x)=a(x)$ の場合のみしか考察されておらず、本章の結果の独創性は明らかである。

第７章において、一般化されたシュレーディガー方程式

$$(Pv)(t,x) = \sqrt{-1}\partial_t v(t,x) + g_1(t,x)\triangle v(t,x) + \sum_{j=1}^{n} r_{1j}(t,x)\partial_j v(t,x) + \sum_{j=1}^{n}\int_0^t r_{2j}(x,t,\tau)\partial_j v(x,\tau)d\tau,$$

$$-T < t < T,\, x \in \Omega$$

を考えた。適当な条件を満たす滑らかな g_1, r_{1j}, r_{2j} に対して、負の指数をもつソボレフ空間におけるカーレマン評価を証明した。これを利用して、ポテンシャル $q \in L^\gamma(\Omega)$ (ただし n を空間次元とし $\gamma > \max\{n,2\}$ とする）を持つシュレーディガー方程式

$$\sqrt{-1}\partial_t y(t,x) + \operatorname{div}(b(x)\nabla y(t,x)) - q(x)y(t,x) = 0$$

に関して q の決定と L^2 空間における観測不等式を証明した。

第８章において、時間にも依存する滑らかでないポテンシャル $q \in L^\infty((-T,T)\times\Omega)$ を持つシュレーディガー方程式に対して L^2 空間における観測不等式を証明した。

第７，８章における袁氏の結果はポテンシャルなどに十分な滑らかさを仮定しない場合にシュレーディガー方程式に対して逆問題や制御の問題を初めて解決したものであり手法的にも独創性が認められる。

袁崗華氏による以上の結果は、古典的な偏微分方程式論における評価を精緻にかつきわめて精力的に遂行することと逆問題における方法論を独自に適合させることによって始めて確立された労作である。対象とする薄板の方程式、放物型方程式ならびにシュレーディガー方程式が重要であるにも関わらず、対応する結果がなかったのはこのような格別の努力が必要不可欠であることの証左に他ならない。よって、論文提出者　袁崗華　は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。