論文の内容の要旨

論文題目　On the homology group of $\mathrm{Out}(F_n)$
　　　　　($\mathrm{Out}(F_n)$ のホモロジー群について)

氏名　大橋 了

1　有理係数ホモロジー群について

F_n を階数 n の自由群とし、

$$\mathrm{Out}(F_n) = \mathrm{Aut}(F_n)/\mathrm{Inn}(F_n)$$

をその外部自己同型群とする。この群について、古くは組み合わせ群論的な手法による研究が行われてきたが、1986 年に Culler と Vogtmann の定義した Outer Space を用いることで、幾何学的な対象としての研究が可能になった。

この群についての有理係数ホモロジーについての既知の結果としては、Hatcher と Vogtmann による、安定ホモロジーの存在

Theorem 1.1 (Hatcher, Vogtmann) $H_i(\mathrm{Out}(F_n);\mathbb{Q})$ は $n \geq 2i+4$ の範囲では n によらず定まる。

および、近年の Galatius による安定ホモロジーの計算

Theorem 1.2 (Galatius)

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{H}_i(\mathrm{Out}(F_n);\mathbb{Q}) = 0 \qquad \textit{for all } i$$

などが挙げられる。また、非安定部分については、Vogtmann によって、$n \leq 4$ に対し、

$$H_i(\mathrm{Out}(F_n);\mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{if } i=0 \\ \mathbb{Q}, & \text{if } i=n=4 \text{ (Vogtmann)} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であることが知られており、$n=5$ についても Gerlits によって自明であることが計算されている。非安定ホモロジー類の具体例については、森田氏の定義した trace map を用いて

$$\mu_i \in H_{4i}(\mathrm{Out}(F_{2i+2}); \mathbb{Q})$$

が定義されるが、このうち μ_1 については森田氏により、また μ_2 については Conant および Vogtmann によって非自明であることが確かめられている。これより、$n=6$ に対し、μ_2 以外の非自明なホモロジー類が存在するか否か、という問題が考えられる。

Outer Space X_n は Teichmüller space と類似した定義を持つ、実 $(3n-4)$ 次元の可縮な空間であり、Riemann 面の代わりに基本群 F_n を持つ（基点なしの）metric グラフを用いることで定義される。また、X_n の spine K_n は実 $(2n-3)$ 次元であり、単体的複体の構造を持つ。X_n および K_n には $\mathrm{Out}(F_n)$ が真正不連続に作用し、従って

$$H_*(\mathrm{Out}(F_n); \mathbb{Q}) \cong H_*(K_n/\mathrm{Out}(F_n); \mathbb{Q})$$

が成り立つ。また、この作用は K_n の単体を単体へ写し、単体ごとの固定部分群は有限群であることなどから、$Q_n = K_n/\mathrm{Out}(F_n)$ は CW 複体としての構造を持つ。

以上から、Q_n の各セルを基底とする有理係数鎖複体のホモロジーを計算することで $\mathrm{Out}(F_n)$ のホモロジーが得られるが、実際には n の増加に伴って Q_n のセルの個数は急速に増加し、コンピュータを用いても、$n \geq 6$ に対してはこの通りの計算は難しい。

本論文ではこの複体に Kontsevich のフィルター付けを用いて 2 つの線形写像の核の次元を計算する問題として扱い、またその写像をグラフの性質を用いて直和分解することで $H_*(\mathrm{Out}(F_6); \mathbb{Q})$ を計算した。計算にはコンピュータを用いたが、その際に 2 つのグラフが同型であるかどうかの判定を簡単にするため、Hatcher と Vogtmann の定義した normal form を用いた。

Kontsevich のフィルター付け $\{F_* Q_n\}$ に対応するスペクトル系列 $\{E^r_{p,q}\}$ に対し、

Proposition 1.3 (Kontsevich)

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(F_p Q_n, F_{p-1} Q_n; \mathbb{Q}) = 0 \quad \textit{for } q \neq 0$$

が成り立つため、これは E^2 項で退化する。このとき、$E^2_{p,0}$ は 2 つの写像の列 $\{\partial^C_{p,q}\}, \{\partial^R_{p,q}\}$ を用いて

$$E^2_{p,0} = \frac{\mathrm{Ker}\,\partial^C_{p,0} \cap \mathrm{Ker}\,\partial^R_{p,0}}{\partial^R_{p+1,0}(\mathrm{Ker}\,\partial^C_{p+1,0})}$$

$$\dim \partial^R_{p+1,0}(\mathrm{Ker}\,\partial^C_{p+1,0}) = \dim \mathrm{Ker}\,\partial^C_{p+1,0} - \dim\left(\mathrm{Ker}\,\partial^C_{p+1,0} \cap \mathrm{Ker}\,\partial^R_{p+1,0}\right)$$

と書けるため、$\mathrm{Ker}\,\partial^C_{p,0}$ および $\mathrm{Ker}\,\partial^C_{p,0} \cap \mathrm{Ker}\,\partial^R_{p,0}$ を計算すればよいことになる。このうち $\partial^C_{p,0}$ については、自然な写像 c_p を用いて直和分解することができる。これらからコンピュータを用いて上記の空間の各次元を求めると、とくに $n=6$ の場合は次のようになる。

p	$\dim \mathrm{Ker}\, \partial^C_{p,0}$	$\dim (\mathrm{Ker}\, \partial^C_{p,0} \cap \mathrm{Ker}\, \partial^R_{p,0})$	$\dim \partial^R_{p+1,0}(\mathrm{Ker}\, \partial^C_{p+1,0})$	$\dim E^2_{p,0}$
0	66	66	65	1
1	193	128	128	0
2	372	244	244	0
3	807	563	563	0
4	1389	826	826	0
5	1440	614	614	0
6	889	275	275	0
7	399	124	124	0
8	160	36	35	1
9	35	0	0	0

これより、次の結果が得られる。

Theorem 1.4 $n \leq 6$ に対し、$\mathrm{Out}(F_n)$ の有理係数ホモロジーは以下のように計算される。

$$H_p(\mathrm{Out}(F_n);\mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}, & \textit{if } p=0 \\ \mathbb{Q}, & \textit{if } p=n=4 \\ \mathbb{Q}, & \textit{if } p=8, n=6 \\ 0, & \textit{otherwise} \end{cases}$$

Corollary 1.5 $n \leq 6$ では $H_*(\mathrm{Out}(F_n);\mathbb{Q})$ の非自明な元は *Morita class* μ_* によって生成される。

2 整係数コホモロジー群について

整係数コホモロジーについては Brady により $H^*(\mathrm{Out}_+(F_3);\mathbb{Z})$ が計算されており、その p 成分について

Theorem 2.1 (Brady)

$$H^n(\mathrm{Out}_+(F_3);\mathbb{Z})_{(3)} = \begin{cases} 2\mathbb{Z}_3, & \textit{if } n \equiv 0 \textit{ mod } 4 \\ 0, & \textit{otherwise} \end{cases}$$

であることが知られている。但し $\mathrm{Out}_+(F_3)$ は

$$1 \to \mathrm{Out}_+(F_n) \to \mathrm{Out}(F_n) \xrightarrow{det\circ \overline{ab}} \mathbb{Z}/2 \to 1,$$

によって定義される $\mathrm{Out}(F_3)$ の部分群である。この際 $\mathrm{Out}_+(F_3)$ と K_3 との整係数の同変コホモロジーを考え、K_n が可縮であるためにそれが $H^*(\mathrm{Out}_+(F_3);\mathbb{Z})$ と同型であることを用いている。

我々はこの手法を $\mathrm{Out}(F_4)$ に対して用い、奇数成分について次の結論を得た。

Theorem 2.2 Out(F_4) の整係数コホモロジーに関する奇数成分は以下の通りである。

$$H^n(\mathrm{Out}(F_4);\mathbb{Z})_{(3)} = \begin{cases} (2m+3)\mathbb{Z}_3, & \text{if } n = 8m \\ 2m\mathbb{Z}_3, & \text{if } n = 8m+3 \\ (2m+3)\mathbb{Z}_3, & \text{if } n = 8m+4 \\ 2(m+1)\mathbb{Z}_3, & \text{if } n = 8m+7 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H^n(\mathrm{Out}(F_4);\mathbb{Z})_{(5)} = \begin{cases} \mathbb{Z}_5, & \text{if } n \equiv 0 \text{ mod } 8 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

また、7 以上の奇素数に関する成分は存在しない。