論文審査の結果の要旨

氏名　大橋　了

有限階数の自由群の自己同型群は，曲面の写像類群と並んで，組み合わせ群論と呼ばれる分野の重要な研究対象であり，Dehn, Nielsen, Magnus 以来，１００年近くにわたって多くの研究成果が積み重ねられて来た．しかし，写像類群の場合には，タイヒミュラー空間という幾何学的な空間が附随して定義され，それに伴って代数幾何学，複素解析学，位相幾何学，微分幾何学等，数学の多くの分野の研究との関わりを持ちつつ研究されて来たのに対し，自由群の自己同型群の場合には，対応する幾何学的な対象が構成されたのは比較的最近のことである．それはCuller とVogtmann による仕事が出版された１９８６年のことで，これ以来，幾何学的な手法による研究が活発に進められて来た．この新しい空間はShalen の命名によりOuter Space と呼ばれている．

論文提出者の大橋氏のテーマは，自由群の自己同型群の内部自己同型群による商群として定義される，自由群の外部自己同型群のホモロジー群の研究である．大橋氏は，上記Outer Space の幾何学的構造を詳細に解析することにより，これらのホモロジー群の研究を行い，いくつかの結果を得た．本論文は二つの部分からなり，第一部は有理係数ホモロジー群，第二部は整数係数コホモロジー群に関する結果を述べたものである．

第一部のテーマは，自由群の外部自己同型群の有理係数ホモロジー群に関するものである．これらの群は，そのホモロジーの次数を定めたとき，それに対応して階数を充分大きくとると，階数によらずに一定となることがHatcher-Vogtmann により知られている．したがって，自由群の外部自己同型群の安定ホモロジー群が定義される．これは写像類群におけるHarer の安定性定理に対応するものである．写像類群の有理係数安定コホモロジー群については，２００２年 Madsen-Weiss により，それがMumford-Morita-Miller 類で生成される多項式代数である，という決定的な結果が得られた．程なくして，２００５年，自由群の外部自己同型群の有理係数安定ホモロジー群は自明であるという結果が，Galatius により証明された．これにより写像類群との相違が明らかとなった．

一方，１９９０年代の末，森田茂之は自由群の外部自己同型群の有理係数ホモロジー群のある系列を定義し，その第一の元の非自明性を示した．同じ頃，Hatcher-Vogtmann は任意階数の自由群の自己同型群の次数６以下の有理ホモロジー群を決定し，階数４次数４のところにのみ非自明な元が現れることを，コンピューターによる計算により証明した．その後，森田とVogtmann の議論により，Hatcher-Vogtmann の非自明な元

は上記第一の元に対応することが確認された．その後，Conant-Vogtmannは上記の系列をMorita類と呼んでOuter Space上で幾何学的に解釈し，とくに階数6次数8の元として定義される第二Morita類が非自明であることを，再びコンピューターの助けを借りて証明した．

大橋氏の得た結果は，階数6以下の自由群の外部自己同型群の有理係数ホモロジー群を完全に決定したものである．手法は，理論的な考察とコンピューターによる計算を巧みに組み合わせたものである．まずホモロジーの境界作用素とOuter Space上のグラフの性質を精密に解析することにより，Outer Spaceから生じる複体を分解した．これにより必要な計算量が大幅に縮小され，コンピューターによる計算が可能となったのである．この結果により，階数6以下の範囲ではMorita類が有理係数ホモロジー群を生成することが示された．

第二部のテーマは，自由群の外部自己同型群の整数係数コホモロジー群の研究である．ここでは，Outer Spaceへの自由群の外部自己同型群の作用が，真性不連続ではあるが自由ではないことから生じる有限固定群を解析する必要がある．階数3の場合には，Bradyの結果が知られていたが，大橋氏は階数4の場合を研究し，Outer Space上のグラフの対称性と対称群のコホモロジー群の関連を明らかにする精緻な計算により，整数係数コホモロジー群のodd primary partを完全に決定した．

上記で述べた論文提出者の研究は，自由群の外部自己同型群のホモロジー群に関して，現在知られている範囲で最良の結果を与えるものであり，これらの群の構造の研究に貢献するものである．

よって，論文提出者　大橋了　は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．