論文の内容の要旨

論文題目

An $SO(3)$-version of 2-torsion instanton invariants

(2 トーションインスタントン不変量の $SO(3)$ 版)

氏名: 笹平　裕史

R. Fintushel と R. Stern は $SU(2)$ 束上の ASD 接続のモジュライ空間の 2-torsion cohomology class を用いて、4 次元スピン多様体に対する不変量を構成した ([5])。これは Donaldson 不変量 ([3]) の変種であるが、次の異なる性質をもつ。一般に、4 次元多様体が $b^+ \geq 1$ を満たす 2 つの 4 次元多様体の連結和とかけるとき、Donaldson 不変量は自明になることが知られている ([3])。しかし、Fintushel と Stern は、b^+ が 1 以上の 4 次元多様体 Y と $S^2 \times S^2$ の連結和 $Y \# S^2 \times S^2$ に対して、彼らの torsion 不変量は一般には非自明であることを示した。

論文の目的は、Fintushel-Stern の構成を non-spin 4 次元多様体に拡張することである。また Fintushel-Stern の不変量と同様に、$Y \# S^2 \times S^2$ に対してその不変量は一般には非自明であることを示すことである。ただし、用いる主束は $SU(2)$ 束でなく $SO(3)$ 束である。

以下その不変量の構成のあらましを述べる。X を向きの付いた単連結 non-spin 4 次元閉リーマン多様体とする。また、ある 1 以上の整数 a にたいして $b^+(X) = 2a$ と仮定する。P を X 上の $SO(3)$ 束とする。$\mathcal{B}_P^*$ を P 上の既約な接続のゲージ同値類の空間とし、M_P を P 上のインスタントンのモジュライ空間とする。今 P は

$$w_2(P) = w_2(X) \in H^2(X; \mathbb{Z}_2), \quad p_1(P) \equiv \sigma(X) \mod 8 \tag{1}$$

を満たすとする。このとき S. Akbulut, T. Mrowka, Y. Ruan は [1] の中で、$H^1(\mathcal{B}_P^*; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ であることを示した。その生成元を $u_1 \in H^1(\mathcal{B}_P^*; \mathbb{Z}_2)$ とする。一方 $[\Sigma] \in H_2(X; \mathbb{Z})$, $[\Sigma] \cdot [\Sigma] \equiv 0 \mod 2$ に対して、ある標準的な方法で整数係数コホモロジー類 $\mu([\Sigma]) \in H^2(\mathcal{B}_P^*; \mathbb{Z})$ を構成できる。ここで、ある 0 以上の整数 d にたいして、$\dim M_P = 2d+1$ であると仮定する。一般に M_P はコンパクトでないが、自己交点数が偶数である d 個のホモロジー類 $[\Sigma_1], \ldots, [\Sigma_d] \in H_2(X; \mathbb{Z})$ に対して, pairing

$$q_X^{u_1}([\Sigma_1], \ldots, [\Sigma_d]) = \langle u_1 \cup \mu([\Sigma_1]) \cup \cdots \cup \mu([\Sigma_d]), [M_P] \rangle \in \mathbb{Z}_2$$

を定義することができる。これはホモロジー類 $[\Sigma_i]$ にのみに依存する X の微分同相不変量であることが示される。

この論文の主定理は $SO(3)$-torsion 不変量の $Y\#S^2\times S^2$ に対する gluing formula である。以下その主張を述べる。Y を向きの付いた単連結 non-spin 4 次元閉多様体とし、$b^+(Y)=2a-1$ と仮定する。ただし a は 1 より大きい整数とする。Q を Y 上の $SO(3)$ 束で

$$w_2(Q)=w_2(Y)\in H^2(Y;\mathbb{Z}_2),\quad p_1(Q)\equiv\sigma(Y)+4 \mod 8$$

を満たすとする。また、ある 0 以上の整数 d にたいして、$\dim M_Q=2d$ と仮定する。このとき、(符号を除いて) Donaldson 不変量

$$q_Y:\otimes^d H^2(Y,\mathbb{Z})\longrightarrow\mathbb{Q}$$

が定義されている。自己交点数が偶数の d 個のホモロジー類 $[\Sigma_1],\dots,[\Sigma_d]\in H_2(Y;\mathbb{Z})$ に対して Donaldson 不変量の値 $q_Y([\Sigma_1],\dots,[\Sigma_d])$ は整数である。次に $X=Y\#S^2\times S^2$ 上の $SO(3)$ 束 P で

$$w_2(P)=w_2(X)\in H^2(X,\mathbb{Z}),\quad p_1(P)=p_1(Q)-4$$

なるものを考える。このとき P は (1) を満たす。また $\dim M_P=2d+5$ である。$S^2\times S^2$ に埋め込まれた曲面 Σ,Σ' を

$$\Sigma=S^2\times\{pt\},\quad \Sigma'=\{pt\}\times S^2$$

により定義する。このとき、Σ,Σ' の自己交点数は偶数である。よって自己交点数が偶数であるホモロジー類 $[\Sigma_1],\dots,[\Sigma_d]\in H_2(Y;\mathbb{Z})$ に対して $q_X^{u_1}([\Sigma_1],\dots,[\Sigma_d],[\Sigma],[\Sigma'])$ は定義されている。論文の主定理は次である。これは [5] Theorem 1.1 の $SO(3)$ 版である。

Theorem 1. 上の状況で、以下の等式が成り立つ。

$$q^{u_1}_{Y\#S^2\times S^2}([\Sigma_1],\dots,[\Sigma_d],[\Sigma],[\Sigma'])\equiv q_Y([\Sigma_1],\dots,[\Sigma_d]) \mod 2.$$

この Theorem 1 と D. Kotschick による $\mathbb{CP}^2$ の Donaldson 不変量の計算 ([6, 7])、さらに $\mathbb{CP}^2\#S^2\times S^2$ が $2\mathbb{CP}^2\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ に微分同相であること ([9]) を組み合わせると次が証明できる。

Theorem 2. $i=1,2$ に対して $\mathbb{CP}^2_i$ を $\mathbb{CP}^2$ のコピーとし、H_i を $H_2(\mathbb{CP}_i;\mathbb{Z})$ の標準的生成元とする。また、E を $H_2(\overline{\mathbb{CP}}^2;\mathbb{Z})$ の標準的生成元とする。このとき

$$q^{u_1}_{\mathbb{CP}^2_1\#\mathbb{CP}^2_2\#\overline{\mathbb{CP}}^2}(-H_1+E,H_2-E)\equiv 1 \mod 2$$

である。

$q^{u_1}_{2\mathbb{CP}^2\#\overline{\mathbb{CP}}^2}$ が非自明であることは次の 2 つのことを意味する。

一つ目は不変量の消滅定理に関することである。$X=2\mathbb{CP}^2\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ を $Y_1=\mathbb{CP}^2$ と $Y_2=\mathbb{CP}^2\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ の連結和とみる。考えている $SO(3)$ 束 P は $w_2(P)=w_2(X)$ を満たす。よって $i=1,2$ に対して $w_2(P)|_{Y_i}$ は非自明である。一般に $X=Y_1\#Y_2$, $b^+(Y_i)>0$, $w_2(P)|_{Y_i}\neq 0$ のとき、P に随伴する Donaldson 不変量は dimenison-count argument により 0 になる ([8])。したがって、$q^{u_1}_{2\mathbb{CP}^2\#\overline{\mathbb{CP}}^2}$ の非自明性は、dimension-count argument を直接適用して、$q^{u_1}_{Y_1\#Y_2}$ の消滅定理を証明することはできないことを示している。

二つ目は Seiberg-Witten 理論に関わることである。E. Witten は [10] の中で、monopole 方程式を用いて Seiberg-Witten 不変量を導入し、それが Donaldson 不変量と等価であることを予想した。P. M. N. Feehan と T. G. Leness は最近 $b_1=0,b^+>1$ を満たす simple type の 4 次元多様体にたいして、この予想が正しいことを証明したと主張している ([4])。一方で positive scalar curvature metric を持つ 4 次元多様体に対して、monopole 方程式から得られる不変量 (Seiberg-Witten 不変量とその精密化である Bauer-Furuta 不変量 [2]) は自明である。$2\mathbb{CP}^2\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ は positive scalar curvature metric を持つので、Seiberg-Witten 不変量と Bauer-Furuta 不変量の自明である。よって $q^{u_1}_{2\mathbb{CP}^2\#\overline{\mathbb{CP}}^2}$ の非自明性は Donaldson 不変量と Seiberg-Witten 不変量の等価性と非常に対照的であるといえる。

参考文献

[1] S. Akbulut, T. Mrowka and Y. Ruan, *Torsion classes and a universal constraint on Donaldson invariants for odd manifolds,* Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 63–76.

[2] S. Bauer and M. Furuta, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. I*, Invent. Math. **155** (2004), 1–19.

[3] S. K. Donaldson, *Polynomial invariants for smooth four-manifolds*, Topology **29** (1990), 257-315.

[4] P. M. N. Feehan and T. G. Leness, *Witten's conjecture for four-manifolds of simple type*, math.DG/0609530.

[5] R. Fintushel and R. Stern, 2-*torsion instanton invariants,* J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 299–339.

[6] D. Kotschick, SO(3)-*invariants for* 4-*manifolds with* $b_2^+ = 1$, Proc. London Math. Soc. (3) **63** (1991), 426–448.

[7] ———, *Moduli of vector bundles with odd* c_1 *on surfaces with* $q = p_g = 0$, Amer. J. Math. **114** (1992), 297–313.

[8] J. Morgan and T. Mrowka, *A note on Donaldson's polynomial invariants*, Internat. Math. Res. Notices (1992), 223–230.

[9] C. T. C. Wall, *On simply-connected* 4-*manifolds*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 141–149.

[10] E. Witten, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 769–796.