論文の内容の要旨

論文題目：**Symmetries in geometric quantization, conformal field theory and (2+1)-dimensional topological field theory**

(幾何的量子化・共形場理論・(2+1) 次元位相的場の理論における対称性の研究)

氏名：藤田 玄

本論文は以下の 2 編からなる。

I: On the functoriality of the Chern-Simons line bundle and the determinant line bundle

II: A combinatorial realization of the Heisenberg action on the space of conformal blocks

これらは互いに独立した論文であるが、ともに Riemann 面上のベクトル束のモジュライ空間の幾何的量子化・2 次元共形場理論・(2+1) 次元位相的場の理論が交錯する分野における対称性の研究という共通の問題意識に基づいたものである。上述の 3 つの分野の関係は Witten [11] に始まり、それぞれの分野またはそれらの相互関係などについて多くの結果が得られてきた。例えば、モジュライ空間上の正則直線束の切断の空間と共形ブロックの同一視 [4]、モジュラー圏・モジュラー関手による位相的場の理論の記述 [3] などがある。その一方で、それぞれの枠組みにおける構成のより直接的な関係はいまだ未知な部分も多い。本論文ではそれぞれの理論が持つ対称性に注目した。最大の対称性はコボルディズム群の作用であり、それはコボルディズム圏からの関手として実現される [6]。その作用は

1. 曲面の写像類群
2. ある Heisenberg 群

の作用を含む。論文 I および II はそれぞれの作用の考察に関するものである。

論文 I は、モジュライ空間の幾何的量子化の枠組みにおける写像類群の作用に関する考察である。具体的な内容は以下のものである。モジュライ上に 2 種類の自然な直線束が構成できる。(それらは互いに同型な正則直線束となる。) 1 つ目は代数・複素幾何的な手法による、いわゆる行列式直線束 [8] である。2 つ目は Chern-Simons 理論に基づく Chern-Simons 直線束 [7][9] である。これらには自然に写像類群が作用する。論文 I ではこの 2 つの作用を考察・比較し、その差を Hodge 束を用いて記述した。我々は Akita-Kawazumi-Uemura [1] による Morita-Mumford 類の代数的一次独立性の証明と類似の手法で主結果を証明した。すなわち、全ての素数位数巡回部分群の作用を決定し、種数に関する安定化の議論に持ち込み写像類群全体に関する結果を得る。主結果は以下のものである。

定理 1. Teichmüller 空間でパラメトライズされた Riemann 面上の平坦 $SU(n)$ 束のモジュライ空間の族を $\mathcal{N}$ とし、その上の Chern-Simons 直線束の族を $\mathcal{L}_{CS} \to \mathcal{N}$、行列式直線束の族を $\mathcal{L}_{Det} \to \mathcal{N}$ とする。これらへの自然な写像類群の作用を考えたとき、$\mathcal{L}_{CS}$ と $\mathcal{L}_{Det} \otimes \mathcal{K}^{\otimes n}$ は写像類群同変直線束として同型である。ただし、$\mathcal{K}$ は Teichmüller 空間上の Hodge 束の最高次外積。(正確にはそれを $\mathcal{N}$ 上に引き戻したものを考える。)

系として次がわかる。

定理 2. 正整数 k に対して、$\mathcal{H}_{CS}^{(k)}$ および $\mathcal{H}_{Det}^{(k)}$ を $\mathcal{L}_{CS}^{\otimes k}$ および $\mathcal{L}_{Det}^{\otimes k}$ の正則切断の空間をファイバーとする Teichmüller 空間上のベクトル束とする。これらへの自然な写像類群の作用を考えたとき、$\mathcal{H}_{CS}^{(k)}$ と $\mathcal{H}_{Det}^{(k)} \otimes \mathcal{K}^{\otimes nk}$ は写像類群同変ベクトル束として同型である。

これらの結果は、同型写像の存在を主張するものであり、具体的な同型写像の構成は今後の課題である。

論文 II では、ある Heisenberg 群の作用を 3 価グラフを用いて記述し、その作用の表現行列を得た。内容をもう少し詳しく述べよう。Blenchet-Habegger-Masbaum-Vogel [6] は $SU(2)$-理論において 2 次元コボルディズム圏と量子不変量の理論に基づき、向き付けられた閉曲面に対してある TQFT 加群を構成した。また、曲面の $\mathbb{Z}/2$ 係数 1 次元ホモロジー群の中心拡大としてある Heisenberg 群を定義し、その作用を積コボルディズムを用いて TQFT 加群上に構成した。さらに彼らはその作用による TQFT 加群のウェイト分解を決定し指標を求めた。彼らの考察は spin-refined TQFT [5] とよばれる理論の出発点となった。正則切断の空間に対して同様の結果が Andersen-Masbaum [2] によって得られている。彼らの結果により、正則切断の空間と [6] での TQFT 加群が Heisenberg 群の表現として同型であることがわかる。指標が求められたのでこの作用は同型を除いて決定されているが、その具体的な表現行列は求められていなかった。正則切断の空間や [6] での TQFT 加群は、曲面のパンツ分解を固定すると、その双対 3 価グラフの許容ウェイトとよばれるものでパラメトライズされた基底を持つことが示されている。(Yoshida [10] も参照せよ。) 我々は、固定されたパンツ分解とその許容ウェイトを用いて Heisenberg 作用を定式化し、双対グラフが平面グラフであるようなパンツ分解に対して、その具体的な表現行列を得た。それは $U(1)$-理論 (テータ関数) の場合の Heisenberg 作用の類似となっている。主結果は以下のように述べられる。

定理 3. 曲面にパンツ分解を固定したとき、パンツ分解に付随するある有限 Abel 群の捩れ 1 双対輪体を用いて、許容ウェイトで生成されるベクトル空間への Heisenberg 作用の表現行列を構成できる。さらに捩れ 1 双対輪体が「外線条件」を満たすとき、それは [2][6] での表現と同型になる。

「外線条件」は捩れ 1 双対輪体に対する、グラフの組み合わせ・幾何的な条件であって、共形ブロックの分解定理の観点からみて非常に自然な条件である。正確な定義は論文中で与える。外線条件をみたす捩れ 1 双対輪体の定めるコホモロジー類は一意であることがわかる。存在については以下がわかった。

定理 4. パンツ分解の双対グラフが平面グラフであるとき、外線条件をみたす捩れ 1 双対輪体を具体的に構成できる。

これらの定理は、平面 3 価グラフが与えられたとき共形ブロックへの Heisenberg 作用を組み合わせ的に構成でき、さらにその表現行列が具体的に得られることを主張する。しかし、既存の結果では「平面」の仮定は不要であり、実際に非平面グラフに対する例も構成できた。これらを踏まえると、全ての 3 価グラフに対して外線条件をみたす捩れ 1 双対輪体の統一的な構成があると期待される。既存の幾何的な構成と我々の構成の関係を明らかにすることは今後の課題である。

謝辞
本論文の作成にあたり、修士のころからの指導教官である古田幹雄教授からは多くの励ましの言葉と有益なアドバイスをいただきました。東京工業大学の吉田朋好教授は、ご自身のアーベル化の仕事について詳細およびその哲学を話して下さり、有意義な議論をして下さいました。心よりお礼申し上げます。また、論文 II の内容について時間をとって聞いて下さった河野俊丈教授、寺杣友秀助教授にも感謝申し上げます。論文 I の作成時には東京大学 21 世紀 COE プログラムの、論文 II の作成時には日本学術振興会による援助を受けました。感謝申し上げます。最後に、非数学的な面で私を支えてくれた友人および家族に感謝します。

参考文献

[1] T. Akita, N. Kawazumi and T. Uemura, *Periodic surface automorphisms and algebraic independence of Morita-Mumford clasees*, J.Pure Appl. Algebra, 160 (2001), 1-11.

[2] J. E. Andersen and G. Masbaum, *Involutions on moduli spaces and refinements of the Verlinde formula*, Math. Ann., 314 (1999), 291-326.

[3] B. Bakalov and A. Kirillov, *Lectures on Tensor categories and modular functors*, Univ. Lecture Series, 21. AMS (2001).

[4] A. Beauv1ille and Y. Laszlo, *Conformal blocks and generalized theta functions*, Comm. Math. Phys., 164 (1994), 385-419.

[5] C. Blanchet and G. Masbaum, *Topological quantum field theories for surfaces with spin structure*, Duke Math. J., 82 (1996), 229-267.

[6] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum and P. Vogel, *Topological quantum field theories derived from the Kauffman bracket*, Topology 34, No.4 (1995), 883-927.

[7] D. S. Freed, *Classical Chern-Simons theory I*, Adv. Math., 113 (1995), 237-303.

[8] D. Quillen, *Determinants of Cauchy-Riemann operators over a Riemann surface*, Funct. Anal. Appl., 19 (1985), 31-34.

[9] T. R. Ramadas, I. M. Singer and J. Weitsman, *Some comments on Chern-Simons gauge theory*, Comm. Math. Phys., 126 (1989), 409-420.

[10] T. Yoshida *An abelianization of $SU(2)$ Wess-Zumino-Witten model*, Ann. of Math., 164, No.1 (2006), 1-49.

[11] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys., 121 (1989), 351-399.