論文の内容の要旨

論文題目：Radon transforms of constructible functions and their applications

(和訳：構成可能函数のラドン変換とその応用)

氏名：松井　優

構成可能函数とは，実解析的多様体の劣解析的 (subanalytic) な滑層分割における各層 (stratum) 上で整数定数値を取る函数である．構成可能層 (sheaf) の複体の局所 Euler-Poincaré 指数 (複体の cohomology の茎の次元の交代和) は構成可能函数となるが，構成可能函数は常にこのように表されることが知られている．構成可能函数の順像，逆像は，対応する層の複体の固有順像，逆像の Euler-Poincaré 指数を取ることで得られる．特に，劣解析的集合の特性函数の積分とはその幾何学的 Euler 数を与える操作となる [3].

X，Y を実解析的多様体，S を $X \times Y$ の部分多様体，f，g を解析的な射とし，次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y. \end{tikzcd}$$

X 上の構成可能函数 φ に対して，その Radon 変換を次で定義する．

$$\mathcal{R}_S(\varphi) = \int_g f^* \varphi.$$

特に，X を射影空間 $\mathbb{P}_n$，Y を Grassmann 多様体 $\mathbb{G}_{n,k}$ ($\mathbb{P}_n$ の k 次元線形部分空間全体)，$S = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in y\}$，$f$，$g$ を $X \times Y$ からの自然な射影の S 上への制限とするとき，X の劣解析的集合 K の特性函数 $\mathbf{1}_K$ の位相的 Radon 変換 $\mathcal{R}_S(\mathbf{1}_K)$ は，$\mathbb{P}_n$ の各 k 次元線型部分空間 L に対して，K の L による切断面の Euler 数 $\chi(K \cap L)$ を与える函数となる．

本研究ではこの構成可能函数の Radon 変換という，代数的，幾何学的な変換に対して，通常の解析的 Radon 変換と同様に，その反転公式，像の特徴付けに関する考察を行い，結果を得た．また，その代数幾何学への応用として双対多様体の次数公式に関する結果を得た．本論文は次の 3 部から成る．なお，本論文中の Part II および Part III には竹内潔筑波大学数学系助教授との共同研究の内容を含む．

Part I: 構成可能函数の Radon 変換の組み合わせ論的考察．

Grassmann 多様体の Schubert 分割を用いた組み合わせ論的な手法によって，実および複素数体上の Grassmann 多様体から Grassmann 多様体への位相的 Radon 変換の反転作用素を具体的に構成した．これは実射影空間からその双対空間への位相的 Radon 変換の Schapira による反転公式 [5] の一般化である．

Theorem 1. (i) $0 \leq p < q \leq n$ なる整数 p，q に対し，$X = \mathbb{G}_{n,p}$，$Y = \mathbb{G}_{n,q}$，$S = \{(x,y) \in X \times Y \mid x \subset y\}$ とおく．次の条件が満たされるとき，$\mathcal{R}_S$ の左逆変換を具体的に構成できる．

(a) 複素数体の場合：$p + q \leq n - 1$.

(b) 実数体の場合：$p + q \leq n - 1$ かつ $q - p$ が偶数.

(ii) 更に，$p + q = n - 1$ を満たすとき，$\mathcal{R}_S$ は構成可能函数全体の成す群の間の非自明な同型を与える．

この結果は幾何学的に，例えば，射影空間 $\mathbb{P}_n$ の劣解析的集合 K に対して，任意の k 次元線型部分空間切断による切断面の Euler 数の情報のみから，元の集合 K を復元できることを意味する．但し，実のときは k は偶数とする．これは CT スキャンなどに応用されている解析的 Radon 変換の幾何学版とも言うべき結果である．

また，ここでの手法を応用し，Grassmann 多様体の各 Schubert 胞体の特性函数の位相的 Radon 変換像を各 Schubert 胞体に付随する Young 図形によって特徴付けた．

Part II: 構成可能函数の Radon 変換の超局所的考察．

柏原による構成可能函数と Lagrange 多様体との対応付けという超局所的な視点 [3] を応用し，射影空間から Grassmann 多様体への位相的 Radon 変換の像の特性サイクルの挙動，すなわち位相的 Radon 変換の超局所像の特徴付けを行った．これにより，Ernström による複素射影空間から複素 Grassmann 多様体への位相的 Radon 変換の像の特徴付けに関する結果 [1] の簡明な別証明を与えただけでなく，実射影空間 $X = \mathbb{RP}_n$ から実 Grassmann 多様体 $Y = \mathbb{G}_{n,k}$ への Radon 変換の像の特徴付けにも成功した．特に複素の場合にはない実特有の結果として，$Y = \mathbb{RP}_n^*$ (resp. $Y = \mathbb{G}_{n,k}$) のとき，X の滑らかな部分多様体 M の特性函数の Radon 変換 $\mathcal{R}_S(\mathbf{1}_M)$ の特性サイクル $CC(\mathcal{R}_S(\mathbf{1}_M))$ を表すには，代数幾何で古典的に知られている M の双対多様体 M^* (resp. k 双対多様体 $M^{\langle k \rangle}$) の主曲率という微分幾何学的な情報が必要であることがわかった．また，このために k 双対多様体の微分幾何学的な性質を調べた．

Theorem 2. $X = \mathbb{RP}_n$，$Y = \mathbb{G}_{n,k}$ とする．M を $X = \mathbb{RP}_n$ の滑らかな連結部分多様体とする．$k \geq \dim M$ のとき，$\theta_y \in \dot{T}^*_{M^{\langle k \rangle}_{\mathrm{reg}}} Y$ の近傍において，次が成り立つ．

$$CC(\mathcal{R}_S(\mathbf{1}_M)) = (-1)^s [T^*_{M^{\langle k \rangle}_{\mathrm{reg}}} Y].$$

ただし，$M^{\langle k\rangle}$ は M の k 双対多様体，

$$s = \frac{1}{2}(-\mathrm{dim}M - k(n-k) + \mathrm{dim}M^{\langle k\rangle} + \mathrm{sgn}h_{M^{\langle k\rangle}_{\mathrm{reg}},\theta_y})),$$

$h_{M^{\langle k\rangle}_{\mathrm{reg}},\theta_y}$ は $M^{\langle k\rangle}_{\mathrm{reg}} \subset Y = \mathbb{G}_{n,k}$ の θ_y 方向の第 2 基本形式.

この応用として，滑らかな射影多様体 M の特性函数の Radon 変換 $\mathcal{R}_S(\mathbf{1}_M)$ の $Y = \mathbb{RP}^*_n$ (resp. $Y = \mathbb{G}_{n,k}$) 上の各点における値をある 1 点での値と双対多様体 M^* (resp. k 双対多様体 $M^{\langle k\rangle}$) の主曲率などの幾何学情報のみから再構成する結果を得た．また，構成可能函数の Radon 変換に対する Helgason 型の台定理も得た.

Part III: 構成可能函数の Radon 変換と次数公式．

複素における構成可能函数の Radon 変換の代数幾何学への応用として，双対多様体の (位相的) 次数を与える公式を求めた．特に，Ernström による射影代数多様体 V の Euler 障害 Eu_V を用いた次数公式 [2] を超局所的観点から再考察し，双対多様体のみならず k 双対多様体にまで結果を拡張した.

Theorem 3. V を $X = \mathbb{CP}_n$ の射影代数多様体とする.

(i) V^* を V の双対多様体とし，$r = \mathrm{codim}V^* = n - \mathrm{dim}V^*$ とおく．このとき，

$$\deg V^* = (-1)^{\mathrm{dim}V+r-1}\left\{r\int_X \mathrm{Eu}_V - (r+1)\int_{H_{n-1}} \mathrm{Eu}_V + \int_{H_{n-r-1}} \mathrm{Eu}_V\right\}. \quad (1)$$

ただし，H_i は一般の位置にある $\mathbb{CP}_n$ の i 次元線形部分空間.

(ii) $V^{\langle k\rangle}$ を V の k 双対多様体とし，$V^{\langle k\rangle}$ が $\mathbb{G}_{n,k}$ の超曲面であると仮定する．このとき，

$$\deg V^{\langle k\rangle} = (-1)^{n-k+\mathrm{dim}V+1}\left\{\int_{H_{k+1}} \mathrm{Eu}_V - 2\int_{H_k} \mathrm{Eu}_V + \int_{H_{k-1}} \mathrm{Eu}_V\right\}.$$

(iii) (ii) の仮定の下，次が成り立つ：

$$\deg V^{\langle k\rangle} = \deg(V\cap H_{k+1})^*.$$

ただし，$(V\cap H_{k+1})^* \subset \mathbb{CP}^*_{k+1}$ は $V\cap H_{k+1}$ を $H_{k+1} \simeq \mathbb{CP}_{k+1}$ の射影代数的集合とみなしたときの双対多様体.

MacPherson による構成可能函数と Chow 群の元との対応付け [4] に注目し，(1) の Chern-Mather 類を用いた次数公式を得た．これは Deligne-Katz の公式の一般化と言える.

Theorem 4. Theorem 3 (i) の設定の下，次が成り立つ.

$$\deg V^* = (-1)^{\mathrm{dim}V+r+1}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r+1}{j}(r-j)\int_V \frac{h^j}{(1+h)^{r+1}}c_*^{CM}(V). \quad (2)$$

ここで，$c_*^{CM}(V)$ は V の Chern-Mather 類，h は一般の位置の超平面の第 1Chern 類.

更には，Yokura-Parusinski-Pragacz-Schürmann の結果 ([6] etc.) を応用して，(2) を具体的に計算するアルゴリズムを得，最も具体的な形で種々の次数公式を得た．これらの公式は，V の次数を用いた V^* の期待次数と V の特異点により生ずる補正項から成り，古典的な Plücker 公式の自然な拡張になっている．更にこれは，双対多様体が超曲面になるときに古典的に知られていた Plücker，Teissier，Kleiman らによる補正項が V の特異点における Milnor 数を用いて記述されるという結果を双対多様体が超曲面でない場合に拡張したものになっている．これらのうち簡潔に表記できる公式の一例として，次の結果を得た．

Corollary 5. V を $\mathbb{CP}_n$ の孤立特異点 $V_{\mathrm{sing}} = \{p_1, \cdots, p_q\}$ のみをもつ次数 d の超曲面とする．このとき，次が成り立つ．

$$\deg V^* = d(d-1)^{n-r} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{(1-x)^{r+1}-1}{x} \right\} \Bigg|_{x=d} + (-1)^r r \sum_{i=1}^{q} (\mu_i + \mu_i').$$

ただし，$r = \mathrm{codim} V^* = n - \dim V^*$，$\mu_i$ (resp. μ_i') は p_i における V の Milnor 数 (resp. slice Milnor 数).

k 双対多様体の次数公式についても全く同様に様々な次数公式を得ている．

参考文献

[1] L. Ernström, Topological Radon transforms and the local Euler obstruction, Duke Math. J. 76 (1994), 1-21.

[2] L. Ernström, A Plücker formula for singular projective varieties, Communications in algebra 25 (1997), 2897-2901.

[3] M. Kashiwara and P. Schapira, Sheaves on manifolds, Grundlehren Math. Wiss. 292, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1990).

[4] R. MacPherson, Chern classes for singular varieties, Ann. of Math. 100 (1974), 423-432.

[5] P. Schapira, Tomography of constructible functions, Lecture Notes Computer Science 948, Springer Berlin (1995), 427-435.

[6] J. Schürmann, A generalized Verdier-type Riemann-Roch theorem for Chern-Schwartz-MacPherson classes, preprint available in arXiv:math AG/0202175.