論文審査の結果の要旨

氏 名: 松井 優

本論文提出者は，構成可能関数の位相的ラドン変換とその応用に関する研究を行った。構成可能関数とは構成可能層複体の局所コホモロジー群の指数として表される様な実解析的多様体上の整数値関数である。より具体的にはその値が与えられた整数である様な点全体が劣解析的な図形，すなわち多様体上の実解析関数の連立不等式で表現できるような集合になる関数のことである。例えば区分的に実解析的な境界をもつ領域の特性関数や射影空間内に埋め込まれた代数多様体の特性関数，即ち代数多様体上で 1，その外で 0 となる様な関数がよい例である。従って多様体上の位相に関し連続でない関数でありまたルベーグ積分の意味では殆ど至る所 0 である関数の場合も多い。さらにラドン変換とはユークリッド空間や射影空間においてその上の関数の各超平面での積分値を与える積分変換でありより一般的にはグラスマン多様体から別の種類のグラスマン多様体上への積分変換として定義される。本論文提出者のいう位相的ラドン変換とはこれとはやや異なるパリ大学の Schapira 教授が 1995 年の論文の中で導入した概念で，通常の積分における図形の体積のかわりに図形のオイラー数を用いるものであり，可算加法性はないものの構成可能関数に対して定義される有限加法性をもつ整数値演算である。

本論文の結果は大きく 3 部に分かれる。第 1 部は位相的ラドン変換の反転公式に関するものである。ユークリッド空間上の解析的なラドン変換に対してはその反転公式がフーリエ変換の理論を通して古くから構成され，グラスマンの場合にも拡張されている。構成可能関数の位相的ラドン変換に対しても Schapira 教授が構成可能層複体の導来圏における関手論的方法によって射影空間の場合にその反転公式を得ていた。論文提出者は Schapira 教授の方法をさらに拡張し一般のグラスマン多様体の場合にも反転公式を得ることに成功した。実際この反転公式が存在するためのグラスマン多様体の次元などに対する必要条件は通常のラドン変換の場合と同様であることもわかった。さらにグラスマン多様体上に特有なある種の構成可能関数についてその位相的ラドン変換をヤング図形などの組み合わせ論的量を使って具体的に計算することにも成功した。

第 2 部では位相的ラドン変換を構成可能関数の作る空間の間の写像と考えたときの像空間を決定する問題を考察した。このような問題は通常のラドン変換においても重要であるが構成可能関数の場合も後に述べるように応用上からも重要である。方法としては京都大学の柏原教授と Schapira 教授による構成可能層複体と当該実解析多様体の余接束内のラグランジアン部分多様体の作る特性サイクル群との同型対応を用いる。この対応により位相的ラドン変換は特性サイクル群間の対応，というより幾何的な写像になり見通しがよくなることがわかっていた。論文提出者は Ernström の複素射影空間内の代数多様体の特性関数の位相的ラドン変換の決定に関する仕事に触発され，

まず筑波大学の竹内潔助教授と共同でその特性サイクル群による再証明を試みグラスマンへの拡張まで含めて成功した。さらに単独でより難しい実グラスマン多様体の場合の解析に取り組み，実ラグランジアンに付随するマスロフ指数と部分多様体の曲率との関係に着目することにより上記のような特性関数の位相的ラドン変換の決定にも成功した。ちなみに複素の場合は対応するマスロフ指数はすべて0であり簡単化されている。さらにこれらの応用として解析的ラドン変換ではCTスキャナーの数学的基礎として知られているHelgasonの台定理を位相的ラドン変換に対しても得ることができた。

第3はこれらの理論の代数幾何学への応用である。この部分はやはり筑波大学の竹内潔助教授との共同研究である。射影空間内の代数曲線の特性関数を考えるとその位相的ラドン変換とは超平面との切り口が有限集合であることからそのオイラー数，即ち交点の数に一致する。従って代数曲線の超平面との切り口の交点数に関する公式は対応する特性関数のラドン変換に関する公式として読み替えることができる。このようなアプローチにより代数曲線の交点数に関する古典的な公式のいくつかを位相的ラドン変換理論の立場でより直接的に再証明することに成功した。またグラスマンや実の場合に拡張することにも成功しこれらは新しい結果である。

以上の結果において先駆者や共同研究者による寄与の分を除いてもこの分野において重要な新しい結果を得ただけでなく新しい研究の境地を開き，今後のこの分野の発展に大きく貢献している。

よって，論文提出者　松井　優　は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。