論文の内容の要旨

論文題目：On ℓ-independence for the étale cohomology of rigid spaces over local fields

（局所体上のリジッド空間のエタールコホモロジーの ℓ 独立性について）

氏名　三枝 洋一

K を局所体，すなわち剰余体が有限体 $\mathbb{F}_q$ である完備離散付値体とし，ℓ を q と互いに素な素数とする．このとき，K 上のスキームの ℓ 進エタールコホモロジーは K の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の表現を与える．こうして得られた Galois 表現についての研究は数論幾何における中心的な課題であり，これまでに様々な結果が得られてきた．

一方，Deligne，Drinfeld，Carayol 等により，考察の範囲をスキームからリジッド空間へと広げることが Galois 表現の研究において重要であることが示唆されている．リジッド空間とは複素解析空間の非アルキメデス類似である．Carayol は論文 [C] において，Lubin-Tate 空間および Drinfeld 上半空間と呼ばれる 2 つのリジッド空間の被覆空間のエタールコホモロジーを通して局所 Langlands 対応が実現されているという予想を提出した．近年の Harris，Taylor 等による局所 Langlands 予想の解決は，この Carayol の予想と志村多様体の数論幾何を組み合わせることによってなされている．

このことからも分かる通り，局所体上のリジッド空間のコホモロジー論は数論幾何において次第にその重要性を増してきている．しかし，K 上のリジッド空間のエタールコホモロジーとして得られる Galois 表現についての一般論はこれまであまり研究されてこなかったようである．本論文はその第一歩となることを目標にして書かれている．

以下ではリジッド空間と言えば $\mathrm{Spa}(K,\mathcal{O}_K)$ 上局所有限型である adic 空間を指すことにする．X を K 上分離的な準コンパクトリジッド空間とする．K の Weil 群 $W_K\subset \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ を標準射 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)\cong\widehat{\mathbb{Z}}$ による $\mathbb{Z}\subset\widehat{\mathbb{Z}}$ の逆像として定める（$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)\cong\widehat{\mathbb{Z}}$ は幾何的 Frobenius 元に $1\in\widehat{\mathbb{Z}}$ を対応させる同型である）．また，$W_K^+\subset W_K$ を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の逆像とする．このとき，X のコンパクト台エタールコホモロジー $H_c^i(\mathsf{X}\otimes_K\overline{K},\mathbb{Q}_\ell)$ は自然に W_K の表現になる．スキームの場合からの類推により，この表現について次の予想を立てることは自然である．

予想

(a) 任意の $\sigma \in W_K^+$ に対し，σ の $H_c^i(\mathsf{X} \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用の固有値 α は代数的整数である．さらに，ある非負整数 m が存在して，任意の体同型 $\iota\colon \overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ に対し $\bigl|\iota(\alpha)\bigr| = q^{m/2}$ となる．

(b) 任意の $\sigma \in W_K^+$ に対し，$\sum_{i=0}^{2\dim \mathsf{X}}(-1)^i \operatorname{Tr}\bigl(\sigma_*; H_c^i(\mathsf{X} \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell)\bigr)$ は ℓ に依存しない整数である．

(a) は Weil 予想の類似であり，(b) が ℓ 独立性と呼ばれる性質である．なお，この予想のスキームにおける対応物は落合理氏により証明されている ([O])．また，X が K 上滑らかなときおよび K の標数が 0 のときは (a) は [M] において証明されている．

以下が本論文の主定理である．

定理　X が K 上滑らかなとき，または K の標数が 0 のとき，予想 (b) は正しい．

上記の予想は $H_c^i(\mathsf{X} \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell)$ が有限次元 $\mathbb{Q}_\ell$ ベクトル空間でないと意味を持たないが，上記の定理の仮定のもとでこのコホモロジーの有限次元性が Huber により証明されていることを附記しておく．

定理の証明について述べる．X が K 上滑らかな場合は斎藤毅氏による ℓ 独立性の証明 ([S]) を参考にした．まず，K 上滑らかなリジッド空間 X は局所的には代数化可能である．つまり，滑らかな一般ファイバーを持つ $\mathcal{O}_K$ 上の有限型スキーム X を特殊ファイバーに沿って完備化して得られる形式スキーム $X^\wedge$ の Raynaud 一般ファイバー $(X^\wedge)^{\mathrm{rig}}$ として表すことができる．さらに，$(X^\wedge)^{\mathrm{rig}}$ のコンパクト台コホモロジーは X の隣接輪体層 $R\psi\mathbb{Q}_\ell$ のコンパクト台コホモロジーと一致することが知られている．したがって，上記のような $\mathcal{O}_K$ 上のスキーム X に対して隣接輪体層のコンパクト台コホモロジーの ℓ 独立性を証明すればよいことになる．これを証明するには，主張を代数的対応付きの場合に拡張する．このように一般化しておくと，X が $\mathcal{O}_K$ 上強半安定である場合への帰着が可能になるのである（de Jong の alteration を用いる）．強半安定の場合には，重さスペクトル系列の開スキームに対する類似物を導入しその関手性を証明することによって，有限体上のスキームに対するある種の ℓ 独立性に帰着することができる．この ℓ 独立性は藤原一宏氏による開多様体の Lefschetz 跡公式から従う．以上により，X が K 上滑らかな場合の証明が完了する．

K の標数が 0 であるとき，一般の X に対する予想 (b) は $\dim \mathsf{X}$ に関する帰納法によって証明される．帰納法を進行させるために Huber による有限性定理 ([H]) の帰結を利用するのだが，この有限性定理が標数 0 の場合にしか証明されていないため，本論文の結果においても標数 0 という仮定が必要になる．

最後に，代数幾何への応用を述べる．X が K 上滑らかな場合の証明の過程で得られた隣接輪体層のコンパクト台コホモロジーの ℓ 独立性を用いると，隣接輪体層の茎への W_K の作用についても類似した ℓ 独立性が証明される．これは Deligne によって提出された Milnor 公式に関する予想の一根拠となっている．また，K 上分離的，有限型かつ滑らかであるが固有とは限らないスキーム X のコンパクト台エタールコホモロジー $H_c^i(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell)$ に対して [S] と類似した ℓ 独立性の問題を考えることができるが，それについても部分的な結果を導くことができる．

参考文献

[C] H. Carayol, *Nonabelian Lubin-Tate theory*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988), 15–39, Perspect. Math., 11, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[H] R. Huber, *A finiteness result for the compactly supported cohomology of rigid analytic varieties*, J. Algebraic Geom. 7 (1998), no. 2, 313–357.

[M] Y. Mieda, *On the action of the Weil group on the ℓ-adic cohomology of rigid spaces over local fields*, Int. Math. Res. Not. 2006, Art. ID 16429, 参考論文 1.

[O] T. Ochiai, *ℓ-independence of the trace of monodromy*, Math. Ann. 315 (1999), no. 2, 321–340.

[S] T. Saito, *Weight spectral sequences and independence of ℓ*, J. Inst. Math. Jussieu 2 (2003), no. 4, 583–634.