# 論文審査の結果の要旨

氏名　安田　雅哉

$E$を代数体$K$上の楕円曲線とする. $K = \mathbf{Q}$, または$K$が類数1の虚2次体の場合には, すべての素点においてよい還元をもつ楕円曲線は存在しないことが知られている. しかし, 実2次体上においては, すべての素点においてよい還元をもつような楕円曲線が存在する. このような状況の下, 安田雅哉は, 本論文において, 実素点をもつ代数体上定義され, すべての素点においてよい還元をもつ楕円曲線の有理点のねじれ部分を考察し, 次のような結果を得ている.

定理. $K$を実素点をもつ代数体, $p$を素数とする. $\zeta_p$を1の原始$p$乗根とし, $p$が$K(\zeta_p)$の類数を割らないとする. さらに, $p$の上の素点$\mathbf{p}$の分岐指数を$e_{\mathbf{p}}$とするとき, 任意の$\mathbf{p}$に対し$e_{\mathbf{p}} < p-1$と仮定する. このとき, $E$が$K$上至る所よい還元を持つならば, $E$は位数$p$の$K$-有理点を持たない.

この定理を用いれば, $K = \mathbf{Q}(\sqrt{6})$, または$K = \mathbf{Q}(\sqrt{7})$とするとき, $K$上至る所よい還元をもつような楕円曲線$E$をとれば, $p \geq 5$なる素数$p$に対し, $E$には位数$p$の$K$上の有理点が存在しないことがわかる.

つぎに, アーベル多様体の虚数乗法の存在についてつぎの結果を得ている.

定理. $m$を平方因子を持たない負の整数, $K = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$を類数1の虚2次体, $p$を$m$を割らない素数で, $m$が$p$の平方剰余であるとする. $p$は$K(\zeta_p)$の類数を割らないとし, $p$上の素点でだけ悪い還元を持つ$K = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$上のアーベル多様体$A$を考える. このとき, $A$は虚数乗法を持たない.

この系として, $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-19})$上のアーベル多様体で虚数乗法を持ち, 至る所よい還元を持つものは存在しないことがわかる.

2つの定理はいずれも, $K$の整数環$\mathcal{O}_K$上のdiagonal group scheme $\mu_p$の$\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$による拡大を調べ, これが消えることを示すことによってなされる. 群スキームの拡大を調べる手法は, Schoofが$\mathbf{Q}$上の楕円曲線で小さな1素点のみで半単純還元をもち, 他の素点ではよい還元をもつようなものの非存在を調べるために考案したものの類似であるが, その手法を上記2つの定理の証明にうまく適用して結果を得ている.

本論文は, 長い歴史を持ち重要な対象である代数体上の楕円曲線をとり

あげ, それを新たな視点から研究して新しい結果を付け加えた有意義なもので, この方面の研究に大きく貢献するものである. よって、論文提出者　安田　雅哉は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。