論文の内容の要旨

論文題目　Topics on crystal bases for Kirillov-Reshetikhin modules of the exceptional algebra $D_4^{(3)}$

（例外型アフィンリー環 $D_4^{(3)}$ に付随するキリロフ・レシェティヒン加群の結晶基底に関する話題）

氏　　名　　山田　大輔

1. 量子アフィン代数 $U'_q(D_4^{(3)})$ の結晶基底について

可解格子模型の 1 点関数を計算するために, Kang-柏原-Misra-三輪-中島-中屋敷らにより, “完全結晶” という概念が導入された. これはアフィンリー環 $\mathfrak{g}$ の量子展開代数 $U'_q(\mathfrak{g})$ に付随する結晶基底の中で, 非常に良い性質をもつものである. 完全結晶の存在性は, 幾つかの場合に証明されたが, その後の研究の中で新たに発見され続けている. ところが, 任意の既約な有限次元 $U'_q(\mathfrak{g})$-加群が必ずしも結晶基底をもつとは限らない. そこで, 次の問題を考えたい.

問題 1.1. 結晶基底をもつ既約な有限次元 $U'_q(\mathfrak{g})$-加群を全て見つけよ.

この問題にアプローチするために, キリロフ・レシェティヒン加群 $W_s^{(r)}$ (以下略して KR 加群) を研究したい. これは, アフィンリー環のディンキン図形の頂点 0 を除く頂点の番号 r と, 任意の正整数 s の組によってパラメトライズされる. KR 加群に関して, “フェルミ型公式” に起源をもつ以下の予想がある. 尚, 現在までにこの予想の反例は見つかっていない.

予想 1.2. *KR* 加群 $W_s^{(r)}$ は結晶基底をもつ. さらに s が $t_r := max(1, 2/(\alpha_r|\alpha_r))$ の倍数ならば, *KR* 加群 $W_s^{(r)}$ の結晶基底 $B^{r,s}$ は, レベル s/t_r の完全結晶である. ただし, $(\cdot|\cdot)$ はウェイト格子上の標準線形形式.

我々は, 例外型アフィンリー環 $D_4^{(3)}$ の $r=1$ 場合において, 上の予想が正しいことを示した. 以下, 順を追って説明する.

アフィンリー環 $D_4^{(3)}$ は, 部分代数として有限次元単純リー環 G_2 をもつ. その基本ウェイトは, $\overline{\Lambda}_1=\Lambda_1-2\Lambda_0$, $\overline{\Lambda}_2=\Lambda_2-3\Lambda_0$ で与えられる. 量子アフィン代数 $U_q'(D_4^{(3)})$ は, $\mathbb{Q}(q)$ 上の結合代数で, $\{e_i,f_i,t_i^{\pm 1}\mid i=0,1,2\}$, により生成される. 量子アフィン代数 $U_q'(D_4^{(3)})$ の基本表現 $V^1:=W_1^{(1)}$ は, 最高ウェイト $\overline{\Lambda}_1$, 0 をもつ既約最高ウェイト $U_q(G_2)$-加群 $V^{G_2}(\overline{\Lambda}_1)$ と $V^{G_2}(0)$ の直和で与えられる. V^1 の基底を $\{v_1,v_2,v_3,v_0,v_{\bar{3}},v_{\bar{2}},v_{\bar{1}},v_\phi\}$ とする. V^1 は $U_q'(D_4^{(3)})$-加群の構造をもち, 基底ベクトルのウェイトはそれぞれ $\Lambda_1-2\Lambda_0$, $\Lambda_2-\Lambda_1-\Lambda_0$, $2\Lambda_1-\Lambda_2-\Lambda_0$, 0, $-2\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_0$, $-\Lambda_2+\Lambda_1+\Lambda_0$, $-\Lambda_1+2\Lambda_0$, 0 で与えられる. ただし, v_ϕ は $V(0)$ に属する. 我々は, $U_q'(D_4^{(3)})$ 加群 V^1 のテンソル積 $V^1\otimes V^1$ に対する量子 R 行列を計算し, "フュージョン" と呼ばれる方法により, $U_q'(D_4^{(3)})$-加群 $V^l:=W_l^{(1)}$ を構成した. さらに, V^l が結晶基底をもち, かつ次の形式の分解をもつことを示した.

$$V^l \simeq \bigoplus_{j=0}^{l} V^{G_2}(j\overline{\Lambda}_1) \quad \text{as } U_q(G_2)\text{-modules} \tag{1.1}$$

我々は, $U_q'(D_4^{(3)})$-加群 V^l と同じ分解をもつ $U_q'(D_4^{(3)})$ 結晶 B_l $(l\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ を, 有限次元既約 $U_q(G_2)$-加群 $\bigoplus_{j=0}^{l}V^{G_2}(j\overline{\Lambda}_1)$ の結晶基底 $\bigoplus_{j=0}^{l}B^{G_2}(j\overline{\Lambda}_1)$ と同型なものとして導入し, 各 $B^{G_2}(j\Lambda_1)$ に対し, その元を全順序つきの letter $1\prec 2\prec 3\prec 0\prec \bar{3}\prec\bar{2}\prec\bar{1}$ からなる型 (j) の標準盤 (letter 0 は高々1 個) と同値な座標形式で定義した. 作用 $\tilde{e}_i,\tilde{f}_i$ $(i=1,2)$ を, Kang-Misra の $U_q(G_2)$ 結晶より定義した. 作用 $\tilde{e}_0,\tilde{f}_0$ に関しては, 山根の $U_q'(G_2)$ 結晶を基にした我々の計算機実験の結果から独自に定義した. この定義の下で我々は, B_l の結晶グラフから 2-arrow を除去すると B_l は次の形式に分解されることを示した.

$$B_l \simeq \bigoplus_{i=0}^{[\frac{l}{2}]} \bigoplus_{\substack{i\leq j_0,j_1\leq l-i \\ j_0,j_1\equiv l-i \pmod 3}} B^{A_2}(j_0\Lambda_0+j_1\Lambda_1) \quad \text{as } U_q(A_2)\text{-crystals} \tag{1.2}$$

"結晶 B_l は V^l の結晶基底として同型か？" という問題が生じる. この問題は柏原により肯定的に解決された. 尚, 柏原がこの問題を解決するために提出した定理は, 別の型のアフィンリー環にも適用できる.

以上の研究から, 次の主結果を得た.

定理 1.3. 任意の $l\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し, 結晶 B_l は $U_q'(D_4^{(3)})$ 加群 V^l の結晶基底として同型であり, かつレベル l の完全結晶である.

我々はまた, アフィンリー環 $D_4^{(3)}$ のディンキン図形の頂点 2 に対応する KR 加群 $W_1^{(2)}$ の結晶基底について新しい結果を得た. 我々は, 別のフュージョンにより基本表現 $W_1^{(1)}$ から反対称テンソル表現 $W_1^{(2)}$ を構成し, それが結晶基底をもち, かつ次の形式に分解されることを示した.

$$W_1^{(2)} \simeq V^{G_2}(\overline{\Lambda}_2)\oplus V^{G_2}(\overline{\Lambda}_1)^{\oplus 2}\oplus V^{G_2}(0) \quad \text{as } U_q(G_2)\text{-modules} \tag{1.3}$$

さらに, 結晶 B_l のときと同様の議論を経て, $W_1^{(2)}$ の具体的な結晶構造を与えた.

2. 超離散可積分系への応用

1990 年に高橋・薩摩により "箱玉系" と呼ばれるソリトン・セルオートマトンが導入された. この系は, 離散ソリトン方程式を "超離散化" と呼ばれる操作を施すことに

より得られることが発見され, 超離散可積分系の重要な例となった. 90 年代後半に, 非例外型アフィンリー環に付随する結晶化された可解格子模型の中にソリトン・セルオートマトンが現れることが発見された. この系はアフィン化された結晶のテンソル積から構成される. 組合せ R(量子 R 行列の $q=0$ 極限) をテンソル積の左端から右端に向かって順次作用させることにより, 系の時間発展とそれに付随するエネルギーが定義される. 組合せ R 行列がヤン・バクスター方程式を満たすことから, 時間発展は可換性を満たし, かつエネルギーは保存量であることが示される. 1-ソリトン状態は系のエネルギーの視点から定義される. ソリトンセルオートマトンの重要問題のひとつに, 次のようなものがある.

問題 2.1. ソリトンの散乱則を表現論的に記述せよ.

この問題にアプローチするために, 長さ l の 1-ソリトン状態をレベル l のアフィン結晶でラベル付けする. このとき, ソリトン状態は一意的には定まらない. これを長さ l のソリトン状態の内部自由度という. 系の中で m 個の 1-ソリトン状態が互いに十分離れて存在するとき, これを m-ソリトン状態といい, アフィン結晶の m 重テンソル積で表す. 1-ソリトン状態は時間発展すると, 内部自由度を保存したまま長いものほど速く伝播する. よって, 初期状態が, 長いソリトンが左側, 短いソリトンが右側にある 2 ソリトン状態の場合, 十分時間が経過すると, 古典ソリトン理論のような現象 “長いソリトンが短いソリトンを通過して, 位相がずれる”が起きると期待される.

ランク n の非例外型アフィンリー環 $\mathfrak{g}_n$ に付随するソリトンセルオートマトンについて, 次のことが知られている.

- 1-ソリトン状態は, ランクが 1 下がった量子アフィン代数 $U_q(\mathfrak{g}_{n-1})$ の結晶基底でラベル付けされる.
- ソリトンの 2 体散乱則は, $U_q(\mathfrak{g}_{n-1})$ 結晶に付随する組合せ R (for 内部自由度の変化) とエネルギー関数 (for 位相のずれ) の “1 倍”で記述される.
- 多体散乱は 2 体散乱に分解する.

結晶基底の視点から箱玉系を構成するには, $B_l \otimes B_1$ 上の組合せ R が重要な鍵となる. 結晶構造が既知ならば, 組合せ R の定義にしたがって, その対応表 $\{(b_1 \otimes b_2, R(b_1 \otimes b_2))\}$ を作ることができるが, 系の状態の時間発展は組合せ $R: B_l \otimes B_1 \to B_1 \otimes B_l$ をシステムサイズの回数分 (これは十分大きい!) だけ繰り返すことにより定義されるため, 系の時間発展を計算するのに非常に時間を要する. そこで組合せ R の高速アルゴリズムを構成する必要が出てくる.

以下, アフィンリー環 $D_4^{(3)}$ に話を限定する. 我々は, Kang-Misra の G_2 型タブローに対する Lecouvey の列挿入算法を用いて, $B_l \otimes B_1$ 上の組合せ R のアルゴリズムを構成した. 我々は, 非例外型アフィンリー環の場合と同様の方法で, 例外型アフィンリー環 $D_4^{(3)}$ に付随するソリトンセルオートマトンを構成し, 以下の結果を得た.

- 1-ソリトン状態は, 量子アフィン代数 $U_q(A_1^{(1)})$ の結晶基底でラベル付けされる.
- ソリトンの 2 体散乱則は, $U_q(A_1^{(1)})$ 結晶に付随する組合せ R (for 内部自由度の変化) とエネルギー関数 (for 位相のずれ) の “3 倍”で記述される.
- 多体散乱は 2 体散乱に分解する.

ここで特筆すべき点は, ソリトンとその散乱則を記述するアフィンリー環が $A_1^{(1)}$ であることと, 散乱後の位相のずれがエネルギー関数の “3 倍”で表せることである. この点で, 我々の研究は新しいといえる.