論文審査の結果の要旨

氏 名　　山田　大輔

本論文は量子代数に関する2つの重要な結果を与えている。ひとつは、量子アフィン代数 $U'_q(D_4^{(3)})$ のキリロフ・レシェティヒン加群 $W_s^{(1)}$ は結晶基底をもち、その結晶基底 B_l が完全結晶であることを証明したことである。もうひとつは、その応用として $U'_q(D_4^{(3)})$ に付随するソリトンセルオートマトンを構成し、ソリトンの散乱規則を決定したことである。

アフィンリー環 $D_4^{(3)}$ は、部分代数として有限次元単純リー環 G_2 をもつ。その基本ウェイトは、$\overline{\Lambda}_1 = \Lambda_1 - 2\Lambda_0, \overline{\Lambda}_2 = \Lambda_2 - 3\Lambda_0$ で与えられる。量子アフィン代数 $U'_q(D_4^{(3)})$ の基本表現 $V^1 := W_1^{(1)}$ は、最高ウェイト $\overline{\Lambda}_1$、0 をもつ既約最高ウェイト $U_q(G_2)$-加群 $V^{G_2}(\overline{\Lambda}_1)$ と $V^{G_2}(0)$ の直和で与えられる。論文提出者は、$U'_q(D_4^{(3)})$ 加群 V^1 のテンソル積 $V^1 \otimes V^1$ に対する量子 R 行列を計算し、"フュージョン"と呼ばれる方法により、$U'_q(D_4^{(3)})$-加群 $V^l := W_l^{(1)}$ を構成した。そして、V^l が結晶基底をもち、かつ次の形式の分解をもつことを示した。

$$V^l \simeq \bigoplus_{j=0}^{l} V^{G_2}(j\overline{\Lambda}_1) \quad \text{as } U_q(G_2)\text{-modules} \tag{1}$$

さらに $U'_q(D_4^{(3)})$-加群 V^l と同じ分解をもつ $U'_q(D_4^{(3)})$ 結晶 B_l ($l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) を、有限次元既約 $U_q(G_2)$-加群 $\bigoplus_{j=0}^{l} V^{G_2}(j\overline{\Lambda}_1)$ の結晶基底 $\bigoplus_{j=0}^{l} B^{G_2}(j\overline{\Lambda}_1)$ と同型なものとして導入し、各 $B^{G_2}(j\Lambda_1)$ に対し、その元を全順序つきの letter $1 \prec 2 \prec 3 \prec 0 \prec \bar{3} \prec \bar{2} \prec \bar{1}$ からなる型 (j) の標準盤 (letter 0 は高々1個) と同値な座標形式で定義した。柏原作用素については先行研究と類似の定義を行い、B_l の結晶グラフから 2-arrow を除去すると B_l は次の形式に分解されることを示した.

$$B_l \simeq \bigoplus_{i=0}^{[\frac{l}{2}]} \bigoplus_{\substack{i \leq j_0,\ j_1 \leq l-i \\ j_0,\ j_1 \equiv l-i \pmod 3}} B^{A_2}(j_0\Lambda_0 + j_1\Lambda_1) \quad \text{as } U_q(A_2)\text{-crystals} \tag{2}$$

以上をもとに、主定理「任意の $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、結晶 B_l は $U'_q(D_4^{(3)})$ 加群 V^l の結晶基底として同型であり、かつレベル l の完全結晶である。」を得ている。本論文では、この主結果に加えて、アフィンリー環 $D_4^{(3)}$ のディンキン図形の頂点2に対応する KR 加群 $W_1^{(2)}$ の具体的な結晶構造も与えている。

論文の後半では、$U'_q(D_4^{(3)})$ に付随するソリトンセルオートマトンの構成とその散乱則について考察している。ランク n の非例外型アフィンリー環 $\mathfrak{g}_n$ に付随するソリトンセルオートマトンについて、次のことが知られている。

- 1-ソリトン状態は、ランクが1下がった量子アフィン代数 $U_q(\mathfrak{g}_{n-1})$ の結晶基底でラベル付けされる。

- ソリトンの2体散乱則は、$U_q(\mathfrak{g}_{n-1})$ 結晶に付随する組合せ R (for 内部自由度の変化) とエネルギー関数 (for 位相のずれ) の "1倍"で記述される。

- 多体散乱は2体散乱に分解する。

これに対し、本論文では Kang-Misra の G_2 型タブローに対する Lecouvey の列挿入算法を用いて、$B_l \otimes B_1$ 上の組合せ R のアルゴリズムを構成し、非例外型アフィンリー環の場合と同様の方法で、例外型アフィンリー環 $D_4^{(3)}$ に付随するソリトンセルオートマトンを構成し、以下の結果を得ている。

- 1-ソリトン状態は、量子アフィン代数 $U_q(A_1^{(1)})$ の結晶基底でラベル付けされる。

- ソリトンの2体散乱則は、$U_q(A_1^{(1)})$ 結晶に付随する組合せ R (for 内部自由度の変化) とエネルギー関数 (for 位相のずれ) の "3倍"で記述される。

- 多体散乱は2体散乱に分解する。

ここで特筆すべき点は、ソリトンとその散乱則を記述するアフィンリー環が $A_1^{(1)}$ であることと、散乱後の位相のずれがエネルギー関数の "3倍"で表せることである。

まとめると、論文提出者は、アファイン量子代数 $U'_q(D_4^{(3)})$ 似付随するキリロフ・レシェティヒン加群の結晶基底の族 B_l に関して、(1) 柏原作用素の作用の決定、(2) クリスタルとしての分解の決定、(3) 組み合わせ R 行列のアルゴリズムの構成、(4) 可積分セルオートマトンの構成、(5) 可積分セルオートマトンのソリトンの散乱則の決定、を行った。(1)〜(3) には地道で膨大な計算が必要であり、例外型の結晶基底に関する新しい知見を与えている。(4)、(5) については例外型アファイン量子代数に付随する最初の可積分セルオートマトンに関する結果である。よって、論文提出者 山田大輔 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。