

# 論文内容の要旨

## Formation of the Scale Hierarchy in the Plasma Turbulence

(プラズマ乱流におけるスケール階層の形成)

堀 暖

### 1 序論

プラズマにおける乱流は、トカマクなどの閉じ込め実験装置における輸送や太陽風の伝搬に大きな影響を与えている。乱流の基本的な特性としてこれらのプラズマ中の乱流について理論的、数値的に調べることはプラズマ物理において重要である。プラズマ乱流は以下のような理由から複雑な構造を形成する: 1) さまざまな内的スケールによって階層が形成されること; 2) さまざまな不安定性が誘起されること; 3) 波動の伝播が異方的であること (Kraichnan, Iroshnikov による Alfvénic な乱流の議論を参照 [1, 2])。このため、乱流のもっとも基本的な指標であるエネルギースペクトルのべき法則も十分に明らかにされていない。このことは、三次元中性流体においてエネルギースペクトルが Kolmogorov の  $-5/3$  乗則に従うことがよく知られていることと対照的である。一般に Reynolds 数が十分大きくなると、乱流は大きなスケールから小さなスケールに至るまで様々な長さスケールのウズによって構成されるようになる。これを波数で表現すると、低波数から高波数に至るまで様々な波数をもつウズによって乱流が構成される。高波数領域では、プラズマのイオン慣性効果 (Hall 効果) の寄与を考慮する必要があると考えられる。

本研究では、まず、プラズマ中の乱流についてプラズマの多階層性に注目してプラズマ乱流のスペクトルについて理論的な予測を行なった。つぎに、Hall MHD 方程式をもとにしたシェルモデルを新たに定式化した。[3] シェルモデルは乱流のモデル化のひとつであり、中性流体の乱流で用いられるものである。[4, 5] 最後に Hall MHD 方程式を用いて数値計算を行ない、これをもとにプラズマ乱流のスペクトルの性質について議論した。

### 2 Hall MHD 方程式

非圧縮 Hall MHD 方程式は以下のように与えられる:

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times [(\mathbf{u} - \varepsilon(\nabla \times \mathbf{B})) \times \mathbf{B}] + \eta \Delta \mathbf{B}. \quad (2)$$

ここで、 $B$  は磁場、 $u$  は速度、 $p$  は圧力、 $\nu$ 、 $\eta$  は粘性および電気抵抗である。また、 $\varepsilon$  はイオンスキン長とシステム長の比を表しており、Hall パラメータとよばれる。理想 Hall MHD 方程式 ( $\nu = 0$ ,  $\eta = 0$ ) は以下の 3 つの保存量をもつ:

$$E = \frac{1}{2} \int (|u|^2 + |B|^2) dx, \quad (3)$$

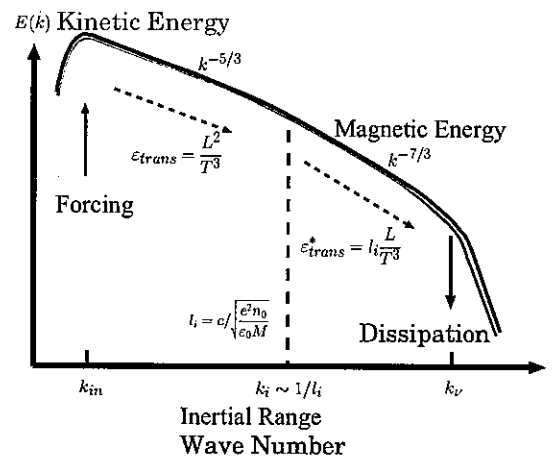
$$H_1 = \frac{1}{2} \int A \cdot B dx, \quad (4)$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \int (A + \varepsilon u) \cdot (B + \varepsilon \nabla \times u) dx. \quad (5)$$

ここで、 $E$  はエネルギー、 $H_1$  は磁気ヘリシティ、 $H_2$  はイオンヘリシティをあらわす。[6]  $A$  はベクトルポテンシャルである。 $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限では、Hall MHD 方程式は一流体 MHD 方程式に一致する。また、修正されたイオンヘリシティ  $(H_2 - H_1)/\varepsilon$  はクロスヘリシティ  $\frac{1}{2} \int A \cdot B dx$  に一致する。

### 3 プラズマ乱流のエネルギースペクトルのスケーリング

Kolmogorov は、局所等方性と局所相似性を仮定し エネルギースペクトル、粘性、波数、エネルギー伝達率のスケールを解析することでエネルギースペクトルのべき法則を得た。中性流体の場合、慣性領域におけるエネルギーの輸送は流体のウズによって担われる。しかし、流体一般の乱流においては、ウズ以外の担体) が慣性領域においてエネルギー輸送を担っている可能性がある。とくにプラズマ乱流においては高波数領域に至ると Hall 項による特異摂動がエネルギー輸送に寄与すると考えられる。これらのプラズマの特性を考慮したエネルギースペクトルのスケーリングを以下のような仮定をおき行なった: 慣性領域内部において、 $k_i \sim \frac{1}{l_i}$  付近を境として低波数領域と高波数領域ではエネルギー伝達の描像が異なる。低波数領域では、「通常の」非線形項が主にエネルギー伝達を担うのに対し、高波数領域では Hall 項が主にエネルギー伝達を担う。このため、高波数領域ではエネルギー伝達率にイオンスキン長  $l_i$  が含まれる。



このような仮定をもとにスケーリングを行なうと以下のようなエネルギースペクトルに関するべき法則が得られる:

$$\text{低波数領域: } E(k) \sim k^{-5/3}, \quad (6)$$

$$\text{高波数領域: } E(k) \sim k^{-7/3}. \quad (7)$$

## 4 Hall MHD シェルモデルによる数値シミュレーション

### 4.1 Hall MHD シェルモデル

非圧縮 Hall MHD 方程式をもとにして新たにシェルモデル (Hall MHD シェルモデル) を定式化した [3]:

$$\begin{aligned} \frac{du_n}{dt} &= i[\alpha_n^{(1)} u_{n+2}^* u_{n+1}^* + \beta_n^{(1)} u_{n+1}^* u_{n-1}^* + \gamma_n^{(1)} u_{n-1}^* u_{n-2}^*] - i[\alpha_n^{(1)} B_{n+2}^* B_{n+1}^* + \beta_n^{(1)} B_{n+1}^* B_{n-1}^* + \gamma_n^{(1)} B_{n-1}^* B_{n-2}^*] - \nu k_n^2 u_n + f \delta_{n,4}, \\ \frac{dB_n}{dt} &= i[\alpha_n^{(2)} B_{n+2}^* u_{n+1}^* + \beta_n^{(2)} B_{n+1}^* u_{n-1}^* + \gamma_n^{(2)} B_{n-1}^* u_{n-2}^*] - i[\alpha_n^{(2)} u_{n+2}^* B_{n+1}^* + \beta_n^{(2)} u_{n+1}^* B_{n-1}^* + \gamma_n^{(2)} u_{n-1}^* B_{n-2}^*] \\ &\quad - i\varepsilon[\alpha_n^{(3)} B_{n+2}^* B_{n+1}^* + \beta_n^{(3)} B_{n+1}^* B_{n-1}^* + \gamma_n^{(3)} B_{n-1}^* B_{n-2}^*] - \eta k_n^2 B_n + g \delta_{n,4}, \end{aligned}$$

ここで、 $f$ 、 $g$  は外力を表し、 $\delta_{n,4}$  は Kronecker のデルタである。また、 $\alpha_n^m$ 、 $\beta_n^m$ 、 $\gamma_n^m$  ( $m = 1, 2, 3$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ) は係数であり、理想 Hall MHD シェルモデル ( $\nu = 0$ ,  $\eta = 0$ ,  $f = 0$ ,  $g = 0$ ) が理想 Hall MHD 方程式の保存量に相当する量を保存するよう定められている。 $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限では、Hall MHD シェルモデルは従来の MHD シェルモデル [10] に

一致し、修正されたイオンヘリシティに相当する量もまたクロスヘリシティに相当する量に一致する。これらのことから Hall MHD シェルモデルと一流体 MHD シェルモデルの間には、Hall MHD 方程式と一流体 MHD 方程式の間に成立している関係と整合性のある関係が成立している。[8, 9, 10]

## 4.2 シミュレーション結果とその検討

Hall MHD シェルモデル (4.1), (4.1) について 4 次の適応 Runge-Kutta 法を用いて数値シミュレーションを行なった。計算条件は以下のとおりである:

シェル  $N = 24$ ;

外力  $f = 1 \times 10^{-4}(1 + i)$ ,  $g = 0$ ;

初期のエネルギースペクトル  $E(k) = k^2 \exp[-k^2]$ ,  $B(k) = 10^{-4} \times k^2 \exp[-k^2]$ .

シミュレーションは Hall パラメータ  $\varepsilon = 0$  (一流体 MHD),  $\varepsilon = 10^{-2}$  (Hall MHD) の 2 つのケースについて行なった。

図 2(a), (b) は一流体 MHD ( $\varepsilon = 0$ ) と Hall MHD ( $\varepsilon = 10^{-2}$ ) それぞれの場合について、エネルギーフラックス (上段),

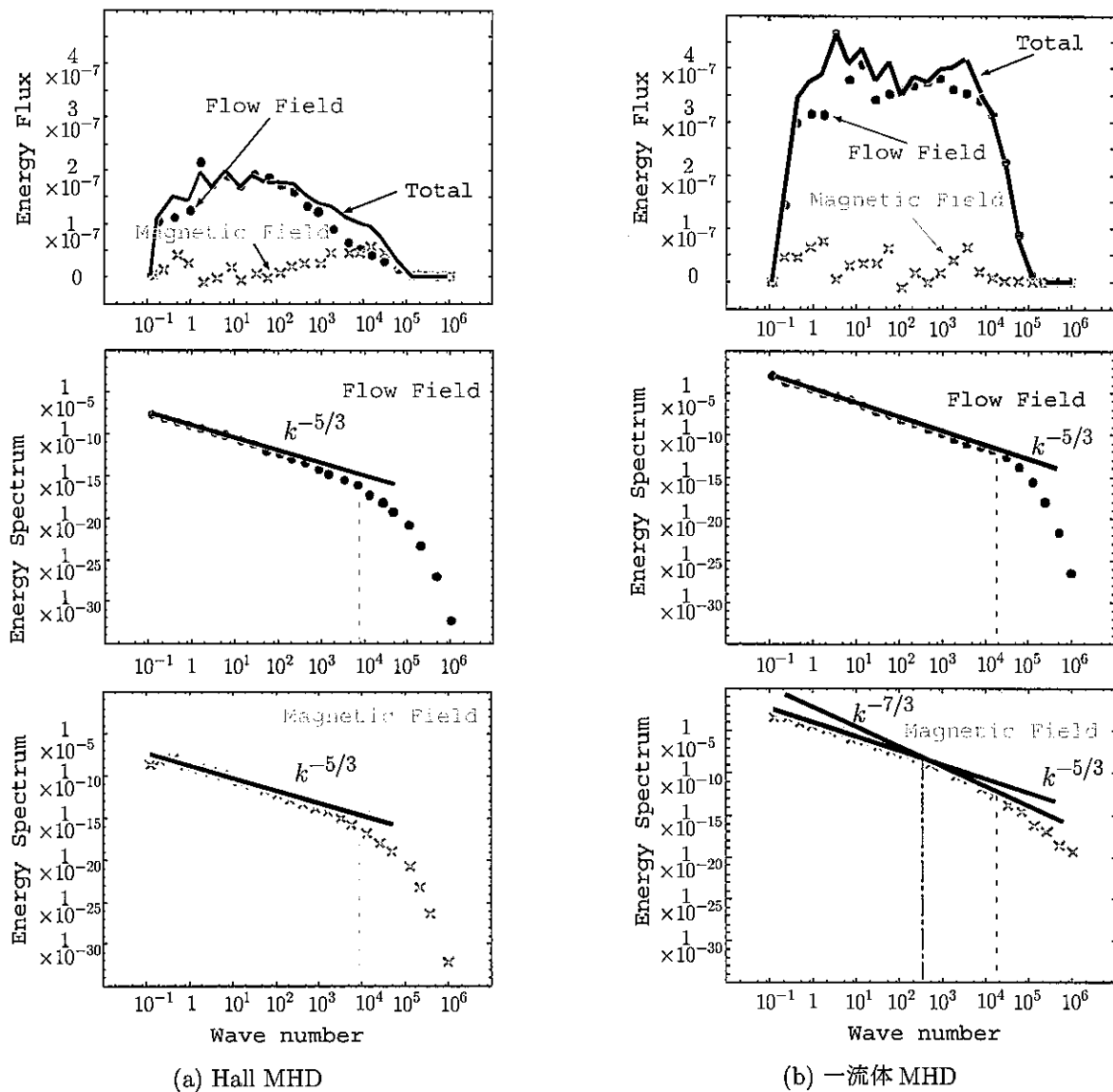


図 2: Hall MHD シェルモデルによるシミュレーション結果. (a) は一流体 MHD ( $\varepsilon = 0$ ), (b) は Hall MHD ( $\varepsilon = 10^{-2}$ ) の計算結果である。それぞれの場合について上からエネルギー伝達率, 流れ場のエネルギースペクトル, 磁場のエネルギースペクトルを表わす。

流れ場のエネルギースペクトル (中段), 磁場のエネルギースペクトル (下段) を示している。グラフ中にプロットした値

はいずれも数値シミュレーションから得た値の時間平均をとったものである。

まず、図 2(a), (b) の上段に注目する。これらは一流体 MHD と Hall MHD のそれぞれのケースにおいて、流れ場、磁場のエネルギーフラックス、それらの合計のフラックスをプロットしたものである。流れ場と磁場のエネルギーフラックスの合計はプラトーを形成していることがわかる。このことは一流体 MHD と Hall MHD いずれのケースにおいても慣性領域が形成されていることを示している。

次に、図 2(a), (b) の中・下段に注目する。これらは一流体 MHD と Hall MHD のそれぞれのケースについて中段は流れ場のエネルギースペクトル、下段は磁場のエネルギースペクトルをプロットしたものである。一流体 MHD の場合、流れ場、磁場ともにエネルギースペクトルが  $-5/3$  乗のべきに従っていることがわかる。(図 2(a) 中・下段参照) 一方、Hall MHD の場合、流れ場のエネルギースペクトルは  $-5/3$  乗のべきに従うことがわかる。(図 2(b) 中段参照) しかし、磁場のエネルギースペクトルは低波数領域において  $-5/3$  乗のべきに従うのに対し、高波数領域においては  $-7/3$  乗のべきに従うことがわかる。(図 2(b) 下段参照)

Hall MHD の場合、波数が  $10^2$  程度の領域で磁場のエネルギースペクトルのべきが  $-5/3$  から  $-7/3$  へと変化する。(図 2(b) 下段参照) この値は Hall パラメータの逆数に相当する量であり、べきの変化は Hall 項による特異摂動の寄与があることを示唆している。一流体 MHD, Hall MHD のいずれの場合においても、エネルギー散逸がはじまる波数領域は  $10^4$  程度であり、これは Kolmogorov の散逸スケールと比較的よい一致を示している。(図 2(a) 中・下段, 図 2(b) 中・下段参照)

## 5 まとめ

Hall MHD をもとにしたシェルモデルを新たに定式化した。このモデルは Hall MHD がもつ保存量に相当する量を保存する。

Hall MHD シェルモデルについて、Hall パラメータ  $\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon = 10^{-2}$  の場合について数値計算を行なった。その結果、一流体 MHD の場合 ( $\varepsilon = 0$ )、流れ場、磁場のエネルギースペクトルがともに  $-5/3$  乗のべきに従うことを示す結果を得た。その一方で Hall MHD の場合、流れ場のエネルギースペクトルが  $-5/3$  乗のべきに従うのに対し、磁場のエネルギースペクトルは低波数領域では  $-5/3$  乗のべきに、高波数領域では  $-7/3$  のべきに従うことを示す結果を得た。

## 参考文献

- [1] R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **8**, 1385 (1965)
- [2] Iroshnikov, Astron. Zh. **40**, 742 (1963)
- [3] D. Hori, M. Furukawa, S. Ohsaki and Z. Yoshida, J. P. F. Res. **81**, 141 (2005)
- [4] E. B. Gledzer, Sov. Phys. Dokl. **18**, (1973) 216
- [5] M. Yamada and K. Ohkitani, J. Phys. Soc. J. **56**, 4210 (1987)
- [6] Z. Yoshida, S. M. Mahajan, and S. Ohsaki, Phys. Plasmas **11**, 3660 (2004)
- [7] A. N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **30**, 3201 (1941)
- [8] C. Gloaguen, J. Léorat, and et. al., Physica D **17D**, 154 (1985)
- [9] D. Biskamp, Phys. Rev. E **50**, 2702 (1994)
- [10] P. Frick and D. Scold, Phys. Rev. E **57**, 4155 (1998)