

# 論文内容の要旨

論文題目：

## Hall Effect on Magnetohydrodynamic Equilibria of Flowing Plasmas

(フローイングプラズマの磁気流体力学平衡におけるホール効果)

氏名： 白石 淳也

### 1 流れをもつプラズマの平衡解析における困難

本論文では、流れをもつプラズマの磁気流体力学 (Magnetohydrodynamics; MHD) 平衡解析における理論的な困難を明らかにし、それを克服する特異摂動理論を構築する。

流れをもつプラズマは、惑星磁気圏やジェットなどの宇宙・天体現象を始め、核融合装置においても観測される。流れはプラズマの平衡、安定性および輸送に本質的な影響を与えることが知られている。また、衝撃波や磁気リコネクションといった実験室系から宇宙・天体プラズマに共通する非線形効果が観測されており、プラズマ流の研究は学際的課題となっている。しかし、流れの効果を取り入れて理論を構築しようとする、様々な数学的困難により、従来の理論手法が使えなくなる。本研究では、専ら流れをもつプラズマの平衡に着目する。

プラズマの理論的研究には、MHD が広く用いられている。MHD は特性長を持たず、実験室系から宇宙・天体系に渡る様々なスケールをもつプラズマ現象に関する理論が構築されてきた。流れが無い場合 (静止平衡) に関して、二次元の場合 (対称性をもつ場合) には、グラッド・シャフランフ (Grad-Shafranov; GS) 方程式が定式化されており [1]、理論が確立しているといえる。しかし流れを平衡解析に含めることは、単に従来の理論に流れの効果を加えれば解けるという問題ではなく、根本的な困難が存在する。具体的には、流れによ

り GS 方程式に特異点が現れること、および双曲型に遷移することが知られている [2] (双曲性により、平衡の問題にも関わらず境界値問題として定式化されない)。流れをもつ平衡の GS 方程式は、

$$\mathcal{L}_s \psi = f(\psi) \quad (1)$$

と書ける ( $\psi$  は磁束関数)。添字  $s$  は、作用素  $\mathcal{L}$  が特異点をもつことを表している。以上に述べた困難により、流れをもつプラズマの MHD 平衡解析は、限られた条件下でのみ行われている。

## 2 ホール効果による特異摂動

特異点近傍のような物理量が急峻に変化する領域においては、小さいスケールの効果が現れると推測される。これは数学的には特異摂動 (微小係数をもつ高階微分) として記述される [3]。イオンスキン長を固有スケールとするホール効果の特異摂動として考察し、MHD 平衡がもつ困難をいかに克服するかを明らかにする。

二次元の場合、ホール MHD 平衡では、

$$\varphi(x, y) = f(\psi) + \varepsilon g(x, y) \quad (2)$$

なる関係がある。ただし  $\varphi$  は流れ関数、 $\varepsilon$  は特異摂動項の係数である。MHD 平衡の場合  $\varepsilon = 0$  であるから、 $\varphi = f(\psi)$  となり、ポロイダル面 (対称性をもつ方向に垂直な平面) で磁場と流れが平行になる。このトポロジカルな制約が、MHD 平衡における特異点形成の原因である。(2) は、ホール効果を導入すると、ポロイダル面で流れが磁場に垂直な成分をもつことを示している ( $\psi$  と  $\varphi$  の等高線がずれる)。

磁場に垂直な流れをもつ物理系として原始星の降着円盤を取り上げ、ホール MHD 平衡理論を応用する。原始星をとりまく降着円盤では、中心天体への降着流およびジェット流により複雑な流れ構造が形成されている。加えて、中心天体の巨大な重力により、円盤はケプラー回転している。磁場は円盤を垂直に貫いていると考えられている。磁場にほぼ垂直な降着流の構造は、理想流体や MHD の平衡では記述することができない。

原始星円盤における弱電離プラズマでは、ホール効果が重要となる。ホール MHD の GS 方程式は

$$\mathcal{L}\psi = f(\psi, \varphi), \quad \mathcal{L}\varphi = g(\psi, \varphi) \quad (3)$$

のように特異点をもたない連立方程式になる。(3) を用いて、降着円盤を模擬した系で数値計算を行った。その結果、ケプラー回転する円盤中で、ホール効果により磁場に垂直な流れが形成されることが分かった。

### 3 ホール効果による特異点の正則化メカニズム

MHD とホール MHD の GS 方程式 [(1) および (3)] から明らかなように、ホール効果により MHD 平衡の特異点は解消される。しかし、一次元系の場合を考えると、MHD 平衡およびホール MHD 平衡は、共に特異点をもつ常微分方程式により記述される。すなわち、一次元系では、ホール効果により特異点は正則化されない。したがって特異点の正則化には二次元性が重要になると推測される。

ホール MHD の枠組みでは、(2) において  $\varepsilon \neq 0$  であり、2つの平衡ブランチを考えることができる [4]。一つ目のブランチは  $\varphi = F(\psi)$  となる場合である [(2) で  $g = g(\psi)$  の場合]。このとき GS 方程式は、(1) と数学的に等価になり、特異点は解消されない。理想 MHD 平衡はこれらのブランチに含まれる。

一方二つ目のブランチは、 $\varphi \neq F(\psi)$  となる場合である。すなわち、流れと磁場がポロイダル面で交叉している平衡である。一次元系ではこのような交叉は起きないから、このブランチはホール効果と二次元性の共存により現れる。二つ目の平衡ブランチの GS 方程式は (3) のような正則な方程式となり、特異点は解消される。

ホール MHD 平衡の GS 方程式 (3) の数値解を求めた。(MHD 極限  $\varepsilon \rightarrow 0$  における) 特異点近傍で特異摂動が発現し、特異点により隔てられた領域が接続される様子を示した。

### 4 ホール効果およびトロイダル効果が生み出す多様な平衡構造

ホール効果と二次元性により MHD 平衡を含む多様な平衡構造が形成されることを示した。ここでは、ホール効果とトロイダル効果により、多様な平衡が存在することを示し、幾つかの解の性質を調べる。トロイダル方向 (対称性をもつ方向) にのみ流れをもつ平衡を解析する。このような流れは実験室系においてしばしば観測される。

MHD 平衡の場合、特異点や双曲性といった困難はポロイダル流の存在に起因する。実際、トロイダル流平衡の場合、GS 方程式は、

$$\mathcal{L}\psi = f(\psi) \quad (4)$$

のように正則な方程式になる。

一方、ホール効果の特異摂動として導入すると、GS 方程式は

$$\mathcal{L}\psi = g(\psi; \varepsilon) \quad (5)$$

のようになる。(5) は (4) と殆ど同じであるが、特異摂動パラメタ  $\varepsilon$  を含む。(5) を得るためには、ホール効果だけでなく、トロイダル効果 (流れの曲率)

も必要となる [5]。ホール MHD 平衡の解を用いて、(i) MHD 近似 ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) したときに MHD 平衡を満たす解、(ii) MHD 近似で発散する解 (ホール MHD に固有の解) を導出した。

二つのクラスの解を、実験装置 RT-1 [6] を模擬した系で数値解析した。平均的な流速をパラメタとして解の振る舞いを解析した。その結果、(i) MHD 平衡では、平均速度が大きくなるに従い、遠心力によって密度ピークは外側にシフトすること、(ii) ホール MHD 平衡では、平均速度が大きくなるに従い、密度ピークは内側にシフトし、MHD 平衡とは対照的な振る舞いを示すことが分かった。また、ホール MHD 平衡では密度が局在化すること、トロイダル流が強いシアをもつことが分かった。

ホール効果 (特異摂動) は、MHD に対する一つの付加項である。しかし、ただ一つの項を付与するだけで、磁場に垂直な流れの形成、二次元系における特異点の正則化、トロイダル流平衡における構造の多様化など、従来の MHD 平衡理論では捉えられない構造を解析できるようになる。

## 参考文献

- [1] H. Grad and H. Rubin, *Second United Nation Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy* (United Nation, Geneva, 1958), Vol. 31, p. 190.
- [2] E. Hameiri, *Phys. Fluids* **26**, 230 (1983).
- [3] Z. Yoshida, S.M. Mahajan, and S. Ohsaki, *Phys. Plasmas* **11**, 3660 (2004).
- [4] J. Shiraishi, S. Ohsaki, and Z. Yoshida, *Phys. Plasmas* **12**, 092308 (2005).
- [5] J. Shiraishi, M. Furukawa, and Z. Yoshida, *Plasma Fusion Res.* **1**, 050 (2006).
- [6] Z. Yoshida, Y. Ogawa, J. Morikawa *et.al.*, *Plasma Fusion Res.* **1**, 008 (2006).