

# 論文内容の要旨

## 論文題目 非圧縮拘束条件付き大規模有限要素解析における反復法の前処理に関する研究

氏名 鈴木 健二

本論文は有限要素法によって離散化された非圧縮拘束条件付き Navier-Stokes 方程式（以下 N-S 方程式）に対する反復ソルバーの前処理に関するものである。具体的には Multigrid 法（以下 MG 法）に用いる smoother として、要素ごとに更新を行う Element by Element Multiplicative (EBEMP)-smoother および ILU smoother を安定化した ILUPS-smoother を提案し、その有効性を検証する。そして、これらの smoother を用いた MG 法を前処理として GMRES 法を用いることにより、実装・並列化が容易であり、N-S 方程式に対しても反復数が自由度によらないソルバーの開発を目的とする。

本論文の構成は第 1 章にて全体に対する緒言を記述し、第 2 章において流体の基礎式である N-S 方程式に対する離散化を行い、マトリクス方程式を導出する。この際に、SUPG 及び PSPG 安定化手法についても説明する。第 3 章においては、連立一次方程式の種々の解法 (MG 法を含む) 及びそれらを理解するうえで欠かせない線形代数の基礎知識を説明する。また、第 3 章の最後においては本章で紹介した代表的なソルバーを正定値問題の代表とも言える Poisson 問題に適用した数値例を掲載する。正定値問題に対する MG 法の効果を実感できる。第 4 章においては定常 Stokes 問題に対する新たな MG 法

(EBEMPPSMG 法)を提案し、数値実験を行い、考察した。また、MG 法を前処理とした GMRES 法を用いることにより、更に高い収束性を達成した。第 5 章においては定常 N-S 問題に対して同様の数値実験及び考察を行った。N-S 問題においては非線形の移流項が存在する。移流項を離散化すると、その係数行列は一般的には非対称になる。これが収束性を妨げ、問題をより一層難しくする。本研究では、異方性に効果のある ILU-smoother を EBEMP2MG-smoother に組み合わせることにより、高い収束性を実現した。第 6 章においては本研究の成果及び今後の課題について紹介する。以後各章に対する概要を示す。

第 1 章の全体緒言は四部構成となっており、初めの第 1.1 章にて本研究の背景と目的が記述されている。次の第 1.2 章では既存の代表的な MG 法に関する研究を紹介し、それらに対する筆者の考察が示されている。そして第 1.3 章にて本論文の構成を示し、最後の第 1.3 章にて本研究の特色について述べる。

第 2 章の N-S 方程式の有限要素法による離散化は四部構成となっており、本章にて有限要素法による流体問題の離散化及び安定化手法を記述している。第 2.1 章では流体のための連続体力学の基礎について述べる。第 2.2 章では流体の支配方程式について述べる。本節にて N-S 方程式が導出される。第 2.3 章では流体の有限要素解析について述べる。ここまでで得られた N-S 方程式を有限要素法を用いて離散化し、連立一次方程式に変換する。第 2.4 章では SUPG、PSPG による安定化有限要素法について述べる。最新のパラメータなどについても言及する。

第 3 章の連立一次方程式の解法は六部構成になっており、本章にて既存の連立一次方程式ソルバー及びその周辺知識を記述している。第 3.1 章ではソルバーの収束性評価などに用いる定理を証明知際に必要となる線形代数の基礎について述べる。第 3.2 章では反復法の基礎といえる Richardson 反復法及び現在主流の反復法といえる Krylov 部分空間法、およびその関係性について説明する。第 3.3 章では非対称行列に対する Krylov 部分空間法ソルバーとしてよく用いられる GMRES 法の収束性やアルゴリズムなどについて説明する。第 3.4 章では、第 3.2 章で説明した方法に前処理という概念を組み合わせた前処理付き Richardson 反復法及び前処理付き Krylov 部分空間法について述べる。ここでは、具体的な前処理として多く用いられる ILU 前処理についても説明する。第 3.5 章では反復回数が自由度数によらないことで有名である Mlutigrad 法という反復法について説明する。具体的なアルゴリズムや smoother などについて述べている。第 3.6 章では、本章で述べてきた反復法の代表として Gauss-Seidel 法、ILU-GMRES 法、そして Gauss-Seidel 法を smoother とした GSMG 法を Poisson 問題に適用した結果を紹介する。Poisson 問題のような正定値問題に対しては MG 法を用いればその反復数が自由度によらないことを実験的に確かめる。

第 4 章の非圧縮拘束条件付定常 Stokes 問題は十二部構成になっており、定常 Stokes 問題に対する MG 法を提案する。具体的には新たな Smoother 及び安定化 MG 法を提案する。最後にそれらの Multigrid 法を前処理とした GMRES 法を紹介する。第 4.1 章の緒言にて、現在の問題点及び本章の流れについて述べる。第 4.2 章では定常 Stokes 問題の係数マトリクスや Reynolds 数などについて述べる。第 4.3 章では、定常 Stokes 問題に対する安定化手法及び安定化パラメータについて考察する。ここで、本章の目標についても言及する。第 4.4 章では本章で取り扱うキャビティーフロー問題の説明及び計算条件などについて述べる。第 4.5 章では既存の smoother を用いた MG 法を定常 Stokes 問題に用い、計算が発散してしまうことを述べる。第 4.6 章では EBEMP-smoother を提案し、誤差エネルギー減少の考察も行う。第 4.7 章では第 4.6 章で提案した EBEMP-smoother を定常 Stokes 問題に対して適用し、有用性及び小さなパラメータに対して発散してしまう問題点について指摘する。第 4.8 章では計算の安定化のために、MG 法内でのみ与えられた安定化パラメータより大きな値を用いる Pressure Stabilized MG 法 (PSMG 法) を提案し、その方法を EBEMP-smoother に対して適用した EBEMPPSMG 法の有用性について検証する。第 4.9 章では第 4.8 章で提案した EBEMPPSMG 法を前処理とした GMRES 法 (EBEMPPSMG-GMRES 法) を提案し、この手法が安定性・収束性の観点から見て既存のソルバーに対して非常に優れていることを述べる。第 4.10 章では EBEMPPSMG 法のパラメータについて考察を行う。第 4.11 章では EBEMPPSMG-GMRES 法の自由度と反復数に関する関係を述べ、この手法が従来手法に比べて非常に優れていることを述べている。第 4.12 章は本章の結言であり定常 Stokes 問題に対して反復数が自由度数に大きく依存しないソルバーの開発に成功したことをまとめている。

第 5 章の非圧縮拘束条件付定常 N-S 問題は九部構成であり、定常 N-S 問題に対する MG 法を提案する。具体的には N-S 問題は Stokes 問題に比べて収束性が Reynolds 数に大きく依存することを述べる。そして、異方性に強いといわれる ILU-smoother の圧力部の不安定さを取り除いた ILUPS-smoother を提案し、その効果を実証する。第 5.1 章の緒言にて、現在の問題点及び本章の流れについて述べる。第 5.2 章では定常 N-S 問題の係数マトリクスについて述べる。第 5.3 章では、定常 N-S 問題に対する計算条件や安定化パラメータについて説明する。第 5.4 章では、第 4 章で提案したソルバーなどを各 Reynolds 数に対して適用し収束性の比較を行う。異方性に強い ILU-GMRES 法の収束性は Reynolds 数に大きくよらないが、本論文で提案している EBEMPPSMG-GMRES 法をそのまま用いると、Reynolds 数が 1000 程度で発散してしまうことを述べる。第 5.5 章及び第 5.6 章では高 Reynolds 数問題に対して多くの数値実験を行い、収束性悪化の原因原因が異流項にあることを述べる。第 5.7 章においては、圧力部の不安定さはあるものの異方性に強いといわれる ILU-smoother を改良した ILUPS-smoother を提案し、その効果を述べる。圧力部安定化のためにはフィルインの制御が必要となり、3 次元問題拡張時に計算量からみて問題点があ

ることを述べる。第 5.8 章では第 5.7 章で述べた ILUPS-smoother の計算量の問題点を解決するために、ILUPS-smoother 及び EBEMP-smoother の 2 つの smoother を使用し、PSMG 法と組み合わせた ILUPS+EBEMPPSMG-GMRES 法を提案し、その効果を検証した。第 5.9 章は本章の結言であり非定常 N-S 問題に対して反復数が自由度に依存しないソルバーの開発に成功したことをまとめている。

第 6 章の全体結言は二部構成となっており、第 6.1 章にて本研究の成果が示されている。具体的には第 4 章及び第 5 章がそれにあたり、定常 Stokes 問題及び定常 N-S 問題に対して有効な smoother を提案した。更には圧力部安定化を考慮した PSMG 法も提案した。

そして、これらの方法を組み合わせることにより、定常 Stokes 問題及び定常 N-S 問題に対して反復数が自由度に依存しないソルバーの開発に成功したことを示した。第 6.2 章では今後の課題を述べている。本研究を非定常 N-S 問題に適用することや並列化を行う際の注意点などが述べられている。