論文の内容の要旨

論文題目　Bell inequalities and the cut polytope: Bridging quantum information science and combinatorial optimization
（Bell 不等式とカット多面体: 量子情報科学と組合せ最適化の結合）

氏　　名　　伊 藤　剛 志

近年量子情報科学では Bell 不等式の研究が活発である．Bell 不等式のうち関連する多面体のファセットに対応するもの（Bell 不等式の研究ではタイトなものと呼ばれる）はそうでないもの（冗長なものと呼ばれる）より重要である．この論文ではまず 2 観測者 2 値測定に対する Bell 不等式と，多面体的組合せ論でカット多面体と呼ばれる高次元の凸多面体の関係を確立する．この関係を用いて Bell 不等式を調べることができるが，一つ問題がある．Bell 不等式を調べるには，完全 2 部グラフとその suspension graph のカット多面体に関する知識が必要だが，完全グラフ以外のグラフのカット多面体に関してはほとんどわかっていないことである．この間を埋めるため，この論文では三角消去という手法を提案する．三角消去はカット多面体に対して成立する不等式に対する持ち上げ操作である．持ち上げ操作はある不等式がカット多面体のファセットであることを証明するための中心的な道具である．三角消去を使うと，完全グラフのカット多面体のファセット不等式を上で述べたグラフを含む様々なグラフのカット多面体のファセット不等式に変換することができ，その結果タイトな Bell 不等式を構成することができる．三角消去で構成される完全 2 部グラフやその suspension のファセット不等式の対称性についても考察する．K_9 のカット多面体 $CUT^{\square}_9$ のファセットの膨大なリストが Christof と Reinelt によって計算されており，これに三角消去を適用することで，対称性に関して等価でない 2 億以上の Bell 不等式を構成することができる．

完全グラフのカット多面体に対して成り立つ不等式の族がいくつか知られている．これに三角消去を適用すると，無限個の Bell 不等式の族を表現する一般的な式を得ることができる．三角消去を導入する前は，そのような Bell 不等式の族は Collins と Gisin による I_{mm22} Bell 不等式しか知られていなかった．

カット多面体との関係や三角消去を用いる手法は, 2 観測者の相関不等式にも適用することができる．本論文では，$m=n=4$ の場合と $\min\{m,n\}\leqq 3$ の場合について，(m,n) 個の 2 値観測量を用いる場合のタイトな相関不等式の完全なリストを提示し，新しい相関不等式の一般的な族を与える．

次に，新たに見つかった Bell 不等式の一部が，Clauser-Horne-Shimony-Holt（CHSH）不等式と呼ばれる最も基本的な Bell 不等式に比べて「強い」ことを示す．すなわち，3 準位量子系

の等方的状態と呼ばれる対称性の高い状態の中に, CHSH 不等式を破らないが当該 Bell 不等式を破るものが存在することを示す．これにより，Collins と Gisin による未解決問題に部分的な解決を与える．一方, 2 準位系に対する同じ問題では, CHSH 不等式より強い Bell 不等式は見つからなかった．これは, 多準位系での非局所性の構造が qubit 系より複雑であることを示唆している．証明の中で, Bell 不等式間の包含関係という組合せ的な関係を利用する．この概念は Collins と Gisin が論じた CHSH 不等式と I_{3322} 不等式の関係の議論を一般化したものである.

完全グラフのカット多面体に対して成り立つ不等式の族のうちもっとも基本的なものは, $\mathrm{CUT}^{\square}{}_3$ に対する三角不等式や $\mathrm{CUT}^{\square}{}_5$ に対する五角形不等式を一般化した hypermetric 不等式である．一方, Grishukhin 不等式と呼ばれるカット多面体 $\mathrm{CUT}^{\square}{}_7$ のファセットに対しては, 自然な一般化が知られていなかった．驚くべきことに $I\_{3322}\$$ Bell 不等式と I_{4422} Bell 不等式はそれぞれ五角形不等式と Grishukhin 不等式の三角消去であることがわかった．この観察に基づき, I_{mm22} Bell 不等式に対して三角消去を適用する前の形を求めることで, 完全グラフのカット多面体に対して成り立つ不等式の列を構成することができる．この不等式の列を一般化することにより，完全グラフのカット多面体に対する I(G,H) 不等式族と I'(G,H;C) 不等式族を得て，標準的手法である持ち上げ操作を用いる方法により，これらの不等式族がファセットになるための十分条件を示した．この十分条件から I_{mm22} Bell 不等式がタイトであることが自然に証明でき, Collins と Gisin によって出された問題を解決した.

さらに進んで，量子相関実験に関連する凸体と組合せ最適化で研究されている凸体の間の関係を調べる．Tsirelson によって導入された隠れ決定性 behavior, 量子的 behavior, no-signalling behavior を表現する凸体と同等の凸体が，カット多面体に関連して知られている凸体の中に見付けられることを示す．これにより，これらの凸体の別の表現が得られ, no-signalling 多面体の頂点に対する必要条件がわかるとともに，量子的 behavior の集合を含む凸体を考えることで，半定値計画によって効率良く Bell 不等式の量子破れの上界を求める方法が得られる.