

審査の結果の要旨

氏名 伊藤 剛志

量子情報処理においては、量子状態を用いて情報を表現・操作・伝送することによって情報処理を実現する。ここで重要なことは、これまでの情報処理が古典力学系に依存して展開されていたのに対して、量子状態を用いた場合の情報処理ではどのような新しいことができるかを解明することである。本研究は、古典力学系の状態では表現できない量子的相関について解析を行うものである。すなわち、量子力学において真の量子性を示す Bell 不等式の理論を、現代の組合せ的凸多面体論の枠組みから見直すことにより、凸多面体論と Bell 不等式の両分野の架け橋となり、それぞれの分野に新たな知見をもたらすことに成功した。

論文は 8 章より構成されている。まず 1 章で組み合わせ最適化における凸多面体論と量子情報処理における Bell 不等式論について概観し、2 章ではそれぞれの分野における基礎的な知識を取りまとめた後、3 章から 7 章までにおいて本論が展開される。

3 章では、Bell 不等式論と凸多面体論とをつなぐ架け橋として基本的な役割を果たす道具である「三角消去」を提案している。離散最適化の分野においては完全グラフのカット多面体に対する不等式が詳しく研究されているのに対して、2 観測者 2 値測定に対する Bell 不等式を調べるには 3 部グラフのカット多面体を考えなければならない。これに対し「三角消去」を用いると完全グラフのカット多面体に対する不等式を 3 部グラフのカット多面体に対する不等式に変換することができる。さらに不等式がファセットを生成するという性質も一定の条件下で保存することができる。

4 章では、提案した三角消去を用いることにより、凸多面体論の成果を Bell 不等式の分野に適用している。4 章で述べられている結果は次の 3 点にまとめられる。

(1) Bell 不等式は、従来は限られた数しか知られていなかったが、凸多面体論における既知の不等式に三角消去を適用することにより、新たな Bell 不等式を得ることができるようになった。K₇までのすべての不等式と、K₈, K₉の部分的な不等式の情報から、あわせて 2 億以上の等価でない Bell 不等式が得られた。得られた Bell 不等式の応用については 6 章でも一部論じられている。

(2) I_{mm22} という Bell 不等式族は、無限個の Bell 不等式を表す一般的な式として、従来知られていた唯一の例であった。これに対し本研究では、hypermetric 不等式や pure clique-web 不等式といった凸多面体論で知られていた不等式族から、無限個の不等式からなる Bell 不等式族を生成することができた。

(3) Bell 不等式よりも一般的な状況を示す相関不等式と呼ばれるものに対しても、三角消去を用いた凸多面体論との関連付けができることを示した。具体的には 2 観測者で (2, 2),

(3, n) および (4, 4) 個の 2 値観測の場合のタイトな相関不等式の完全なリストを示すことに成功し、また不等式の族を得ることもできた。

これら 4 章の成果は、離散最適化における凸多面体論における知見が、三角消去という道具により、Bell 不等式・相関不等式の分野に貢献できることを具体的に示している。

5 章では三角消去の逆変換を用いることにより、Bell 不等式における知見を凸多面体論に応用することができることを示している。具体的には前述の I_{mm22} 不等式から三角消去の逆変換をほどこすことにより、凸多面体論では「散発的」と考えられていた Grishukhin の不等式を含む不等式族が得られることを示した。さらにこれを発展させることにより凸多面体論では従来知られていなかった 2 種類の不等式族を得ることができた。また、これにより I_{mm22} 不等式がタイトであることを自然に証明することができた。

6 章では、4 章で得られた Bell 不等式を用いて、Bell 不等式間の関係についての研究が展開されている。得られた Bell 不等式のうち比較的観測数が少ない 89 個を対象として、まず Bell 不等式間の「包含」という関係について調査して結果を出した。さらに、3 準位系では CHSH 不等式よりも「強い」不等式が存在することを数値計算により示した。しかし 2 準位系ではそのような不等式は発見されなかった。

7 章では、Bell 不等式論と凸多面体論との相互関係について議論が展開されている。古典的な Bell 不等式に対応する凸体は完全 2 部グラフの suspension グラフのカット多面体と対応することが知られていた。これに対して本研究では、相対論的な不等式に対応する凸体がカット多面体の線形緩和の一つとして知られている根付き擬距離多面体と同型であること、量子の場合を表す凸体は根付き擬距離多面体と半定値緩和である *elliptope* の共通部分に含まれることを示した。

最後に 8 章では以上の研究成果をまとめ、将来展望を述べている。

このように本研究は量子情報処理と離散最適化の両分野でそれぞれ展開されていた不等式概念を結びつける手段を提供し、その結合によりそれぞれの分野において新たな知見を与えたり概念を拡張・整理したりすることにより貢献し、新たな知見も得ることに成功している。本研究によりその端緒が開かれた両分野の融合と交流は、今後さらに発展することが期待されるものである。従って、本研究は量子情報処理と組み合わせ最適化の両分野においてきわめて価値の高いものである。

よって本論文は博士（情報理工学）の学位請求論文として合格と認められる。