論文の内容の要旨

論文題目　Methods for realizations of oriented matroids and: Characteristic oriented matroids
（有向マトロイドの実現を与える方法および特徴のある有向マトロイド）

氏　名　中山 裕貴

要素同士の相互関係を符号に抽象化することで得られる有向マトロイドが, 対応する幾何的配置を持つかという実現可能性判定問題(ROM)は，組合せ的モデルと幾何的モデル間のギャップを端的に表すものであり，有向マトロイドの分野における重要な問題である．本論文では，この問題に対し，以下の貢献を行なった．まず第一に，非一様な有向マトロイドの中で特に複雑な構造を持つと考えられる有向マトロイドについて, その実現を得るための新しい方法を提案したこと，第二にはその提案した方法を用いて，特徴のある有向マトロイドの例を構築したこと，そして第三には有向マトロイドの属するクラス間の新たな関係を示したことである．

有向マトロイドが非一様であるとは，部分的に退化した構造を持つことと言える．従来は非一様な場合については有向マトロイドの全体像も明らかにはされていなかったが，Finschi により提案された列挙アルゴリズムにより, 非一様な場合も含む全ての有向マトロイドのデータベースが与えられたことで，各々の例に対して計算機実験を行ない，解析するというアプローチが可能になった．

まず我々は，非一様な有向マトロイドに対し，既知の性質 solvability sequence，双二次最終多項式(BFP)を用いることにより，可能なものに対してはその実現可能性および不可能性を決定する．このどちらの手法によっても実現可能性を判定できない有向マトロイドは，「難しい構造を持つ」有向マトロイドと位置付けることが出来る．

本論文ではこの「難しい構造を持つ」有向マトロイドの実現を与えるための枠組みとして，ROM を極小 reduced system から得られる多項式制約により定義される多項式最適化問題(POP)とみて解く手法と，既に解決した有向マトロイドの実現を用いることで類似した構造を持つ有向マトロイドの実現を与えるための一般化 mutation グラフを提案する．

近年, POP は SDP 緩和を用いることにより現実的に解くことが出来るようになった最適化問題として注目されているが，良い解を求めるために緩和次数を上げた場合，問題のサイズが急激に増加してしまう．我々はこの困難を解決するために，実現行列中の変数を正規化することで変数の数および制約の次数を減らし，また等式制約に注目して，一方の辺を他方で置き換えることにより等式制約を除去することで問題のサイズを縮小し，同時に数値計算の誤差を克服する戦略を提案する．我々はこの戦略に基づき，「難しい構造を持つ」有向マトロイドに対して実現を与える．

次に，我々は有向マトロイドの操作である mutation に注目する．この mutation とは，互いに 1 箇所だけ異なる構造を持つ有向マトロイドに対し，互いに移り合う操作であると言うことが出来る. Mutation は元々は一様な場合についてのみ定義されていたが, 我々はこれを拡張し，非一様な場合に対応した一般化 mutation および一般化 mutation グラフを提案する．一般化 mutation グラフにより隣り合う有向マトロイドは互いに 1 箇所だけ異なる構造を持つため，一般化 mutation の一方が既に実現を与えられている場合，それを用いることにより他方の実現を容易に与えることが出来ると考えられる．本論文では，solvability sequence および POP により与えられた実現を始点として，一般化 mutation グラフの辺に沿って逐次的に実現を与える．

以上で提案した手法を, 非一様な有向マトロイドの中で実現不可能なものが存在することが知られている，ランク r，要素数 n が(4,8)および(3,9)の非一様な有向マトロイド全体に対して適用する．その結果，(r,n)=(4,8)の場合については，非一様な有向マトロイド 178844 個のうち「難しい構造を持つ」 8802 個について, POP を用いた手法により 1857 個, さらに一般化 mutation グラフを用いた手法により 2093 個について実現を与えた.

また我々は, 有向マトロイドの新しいサブクラスとして，一様な有向マトロイドを始点として一般化 mutation グラフの辺を辿ることで到達可能な,「根本的な」有向マトロイドの集合を提案する．この集合について，(r,n)=(4,8)の場合については双二次最終多項式により既知である実現不可能な有向マトロイドがすべてこの根本的なクラスに含まれることを示す。また，Richter-Gebert の定理の対偶を用い, 一般化 mutation グラフの辺に沿って実現不可能な有向マトロイドの列挙を行なう．その結果，(r,n)=(4,8)の場合については，この手法によって列挙された実現不可能な有向マトロイドは全て双二次最終多項式をもつことが分かり, これは双二次最終多項式が(r,n)=(4,8)の場合に置いて十分強力な手法であることの裏付けと捉えることが出来る.

本論文では次に，特徴のある有向マトロイドの紹介を行なう．ランクが 3，要素数が 9 の場合の特徴のある有向マトロイドの例として知られている，Pappus の有向マトロイドや，有理数表現を持たない GP(9)などの例が，ランク 4，要素数が 8 の場合についても存在することを示す.これらの有向マトロイドは我々の提案した一般化 mutation グラフ，および POP の多項式制約のサイズ縮小戦略により得られたものである.

我々は最後に, 有向マトロイドの既知なクラスに対する新たな関係を示す. 有向マトロイドの実現不可能性を保証する性質である BFP と非ユークリッド性について，有向マトロイドが一様である場合については，非ユークリッド性を満たせば必ず BFP を持つという包含関係が存在することが知られていたが, 我々はこの証明を拡張することで, 非一様な有向マトロイドに対しても同様に成り立つことを示す．また，ランクが 3 の場合については，有向マトロイドの実現可能性を保証する性質である solvability sequence を持つ有向マトロイドは必ず not-isolated な要素を持つことが知られているが，我々はランクが 4 の場合について，solvability sequence を持ち，かつ全ての要素が互いに isolated である有向マトロイドが存在することを示す.