審 査 の 結 果 の 要 旨

氏　　名　　中山　裕貴

有向マトロイドは，要素同士の相互関係を符号として抽象的に表すものであるが，それが対応する幾何学的な構造を実際にもつかどうかの実現可能性判定問題は，組み合わせ的モデルと幾何学的モデルのギャップを明快に示すという点で，有向マトロイドの非常に重要な問題と認識されてきている．本研究は，従来の一様な有向マトロイドの実現可能性判定問題に関する知見を拡張し，非一様な有向マトロイドの実現可能性問題について，その退化の程度に着目して判定を行う様々な手法を構築している．本研究の貢献は，主に（１）複雑な非一様有向マトロイドうち実現可能なものを，多項式計画問題を解くことで得る方法を示したこと，（２）有向マトロイドの属するクラス間の新たな関係を示したこと，（３）以上の提案した知見を用いて特徴のある有向マトロイドの例を実際に構築したことの３つにまとめることができる．

本論文は７章で構成され，各章の内容は以下のようにまとめることができる．

第１章では，有向マトロイドの周辺に存在する問題を実現可能性判定問題の観点から整理し，最適化問題等の周辺分野との関係付けを明らかにしている．その上で，非一様有向マトロイドの実現可能性判定問題に関する本論文の貢献についてまとめている．

第２章では，非一様な有向マトロイドの実現可能性判定問題を理解するために必要な公理等を含む予備知識を，本論文で重要な役割を果たす有向マトロイドの退化の概念とともに，具体例をまじえて紹介している．さらに，従来知られている有向マトロイドのデータベースに関しても言及している．

第３章は，まず solvability sequence と双二次最終多項式などの既存の手法を用いて，非一様有向マトロイド全体の実現可能性および不可能性をそれぞれ判定している．そして，ここで実現性が判定できない非一様な有向マトロイドのクラスを「難しい構造をもつ」有向マトロイドと定義し，本研究の主な解析対象と位置づけている．また，有向マトロイドの退化の度合いに基づいた非一様有向マトロイドの階層的な表現方法についても紹介している．本論文では，ランク数４，要素数８とランク数３，要素数９の非一様有向マトロイドOM(4,8)，OM(3,9)について実現可能性判定問題を解いており，この時点でOM(4,8)には全体で178,844個中8,753個，OM(3,9)では全体で456,671個中14,030個の有向マトロイドが，実現性が判定できない「難しい構造をもつ」有向マトロイドと判定される．

第４章から第６章が，本研究の新しい貢献の部分に対応する，「難しい構造をもつ」有向マトロイドの実現可能性判定問題に関する，新しい知見を紹介している．

第４章では，実現可能性判定問題を，極小 reduced system から得られる多項式制約で定まる多項式最適化問題としてとらえ，個々の有向マトロイドの実現を得る手法について述べている．多項式最適化問題は，半正定値緩和を用いることで現実的に解くことが可能となったが，よい解を得るために緩和次数をあげると，緩和問題のサイズが急激に増加するという問題があった．本論文では，この問題を一部の変数を正規化することで，変数の個数および制約の次元を減らし，また等式制約を取り除くことで制約のサイズを縮小し，同時に数値誤差を回避する手法について示している．加えて，ひとつの制約のみが満たされない場合には，小

さいサイズの多項式最適化問題を新たに解きなおすことで有向マトロイドの実現を得る，partial assignment という手法を新たに提案している．この段階で，実現可能性が判定できない非一様有向マトロイドの個数は，OM(4,8)については8,753から6,779へ，OM(3,9)については14,030から10,881に個数を減らすことに成功した．

第５章では，有向マトロイドの構造を変更する操作である mutation を，非一様有向マトロイドに拡張することで，一般化 mutation graph という概念を導入している．一般化 mutation グラフにおいては，稜線で接続される有向マトロイド同士は互いに１箇所だけ構造が異なるため，仮に一方の有向マトロイドが実現可能であれば，先の partial assignment 手法を用いて容易に他方の実現を得ることができる．そこで本論文では，多項式最適化問題および solvability sequence により実現が与えられた有向マトロイドをシードとし，一般化 mutation graph を追跡することにより，逐次的に有向マトロイドの実現を与える手法を提案している．この段階で，実現可能性が判定できない非一様有向マトロイドの個数は，OM(4,8)については6,779から4,803へ，OM(3,9)については10,881から8,548にさらに個数を減らすことに成功した．

第６章では，有向マトロイドの既知のクラスに対する新たな関係を示している．まず，実現不可能性を保証する性質である双二次最終多項式と非ユークリッド性に関し，非ユークリッド性を満たせば必ず双二次最終多項式をもつという包含関係が，一様な有向マトロイドに対して成り立つことが知られていたが，これを非一様な場合でも成り立つことを証明した．また，ランク３のときに，実現可能性を保証する性質である solvability sequence をもつ有向マトロイドは，必ず reduction sequence をもち，従って non-isolated な要素をもつことが知られていたが，これがランク４の場合でも成り立つことを示している．さらに，ランク３要素数９の有向マトロイドで知られている特徴のあるマトロイドが，ランク４要素数８の場合にも存在することを示した．

最後に第７章で論文を総括し，今後の課題について言及している．

以上のように，本論文は有向マトロイドの実現可能性問題に関し多大な貢献を示し，既存の最適化問題に関しても新しい知見をもたらしている点において，非常に独創的かつ重要な研究となっている．審査委員会は，有向マトロイドの分野における本論文の特筆すべき貢献を評価し，博士号に十分値するものと判断した．

よって本論文は博士（情報理工学）の学位請求論文として合格と認められる。