

## 論文の内容の要旨

### 論文題目 “Geometrical Approach to Classical and Quantum Bayesian Prediction”

(古典および量子ベイズ予測への幾何学的アプローチ)

田中 冬彦

独立同一分布での古典ベイズ予測の手法は広く知られており、理論的な研究のみならず応用も多い。一方で、時系列データのような確率過程に従うモデルの場合には状況ががらりと変わり、理論的な取り扱いが難しくなる。しかしながら、未知の確率過程が定常 Gauss 過程と仮定できる場合には、ベイズ予測の問題を未知のスペクトル密度の推定に帰着できる。予測とはある意味、確率分布そのものの推定とみなせるので、独立同一分布での予測理論の結果は、未知スペクトル密度の推定にも適用できることが期待される。本論文の前半では、このことを念頭において、ARMA (Autoregressive moving average) モデルの場合に無情報事前分布に基づいた予測手法について幾何学的手法を用いて調べた。

ベイズ法では無情報事前分布をどう選ぶかという問題が常に議論される。一般には無情報事前分布として Fisher 情報から決まる Jeffreys 事前分布が使われるが本論文では優調和事前分布を提案する。もし、優調和事前分布が存在すれば、優調和事前分布に基づいたベイズスペクトル密度が、Jeffreys 事前分布に基づいた推定量よりも漸近的に優越することが本研究で示された。この結果は Komaki による独立同一分布での結果の拡張になっている。

Komaki が指摘したように、優調和事前分布の存在のための十分条件は注目するパラメトリックモデルをモデル多様体としてみたときに断面曲率が非正であることである。断面曲率はモデルの Fisher 情報から計算される量である。したがって、この方向からまず AR (Autoregressive) モデル多様体上に優調和事前分布が存在するかどうかを断面曲率の符号評価によって検証した。その結果、2 次の AR 過程であれば優調和事前分布が存在することが示された。この結果を受けて本研究ではさらに優調和事前分布の具体形を見つけ出し、数値実験によって優調和事前分布に基づいた推定が Jeffreys 事前分布に基づいた推定よりも優れていることを確認した。

さて、MA (Moving average) モデル多様体の場合には、Fisher 計量が AR モデル多様体と同様になるため、適切なパラメータ変換のもとで同じ結果が得られる。そこで次なるステップとして我々は ARMA 過程の幾何学を調べた。応用上有意義な結果はまだ見つからないが、ARMA(1, 1) モデル多様体は面白い幾何学的な性質をもつことが示された。このモデル多様体は測地的に完備でなく、分散パラメータを固定してしまうと不変体積要素が可積分、言い換えると Jeffreys 事前分布がプロパーになってしまう。この結果は AR(2) (MA(2)) モデル多様体と非常に対照的である。

本論文の後半では量子系でのベイズ予測の適用が述べられる。量子統計は、すでに量子情報や量子光学といった分野では必須のツールとして認識されつつあるが、古典統計での重要な結果の幾つかは適切な修正を行うことで拡張されている。しかしながら、古典統計全体は広い分野であり、量子系への拡張という意味でもまだまだ残されている課題が多い。ベイズ予測の方法もそのような手付かずの分野の一つに入ると思われる。

そこで、本研究では量子系でのベイズ予測を定式化するところから始めた。まず、量子系では密度作用素が確率分布の役割を果たすことに着目して、量子予測をパラメトリックモデルに含まれる真の密度作用素を推定する問題と考える。損失関数を相対エントロピーにとる時、予測密度作用素の中でベイズ予測密度作用素が平均リスクを最小化することが示された。この結果は、古典ベイズ予測で有名な Aitchison の結果の量子系への拡張である。同様のアイデアで、より広い損失関数のクラス、量子  $\alpha$  ダイバージェンスのもとでは一般化ベイズ予測密度作用素がベストであることも示される。

応用として、量子 Gauss 状態の再構成 (reconstruction) の問題を取り扱う。D'Ariano *et al*によって、パラメータの最尤推定に基づく手法が提案されている。しかしながら、予測の観点からは先に示した結果によりベイズ予測密度作用素の方が優れている。このことを直接的な計算によって平均リスクを比較することで確認した。特に、量子 Gauss モデルの場合には対称性が高いため、量子 Fisher 情報の任意性によらず一意に Jeffreys 事前分布を定めることができる。この Jeffreys 事前分布を無情報事前分布とみなしてベイズ予測密度作用素の計算も行った。

本論文の最後では、量子 Gauss モデルの幾何学的性質について議論する。一般に、量子系での Fisher 情報は、行列の非可換性のために古典系の Fisher 情報から一意には拡張されず任意性が残る。ここでは、KMB(Kubo-Mori-Bogoliubov) Fisher 情報を量子 Gauss モデルのリーマン計量とみなして微分幾何学的な量を陽に求めた。驚くべきことに、古典 Gauss モデルでの特徴の一つであるスケール不変性が、量子 Gauss モデルでは破れていた。プランク定数を 0 に近づける古典極限をとると量子相対エントロピーが古典的な相対エントロピーに一致することも示された。