論文内容の要旨

INTEGRABLE VERTEX MODELS AND COMBINATORIAL COUNTINGS
(可解頂点模型と組み合わせ論的数え上げ)

茂 地 圭 一

序

近年、一次元可解模型の基底状態の波動関数や相関関数が組み合わせ論的な数え上げと密接なつながりがあることがわかってきており、注目を集めている。本論文に関わる研究として、次の二つの系に注目した。一つは可解位相モデルと歪3次元 Young 図 (skew plane partition) の数え上げであり、もう一つは $O(1)$ ループモデルと交代符号行列の数え上げである。

可解位相モデルは、q 変形した1次元格子ボゾンモデルの $q \to 0$ の極限で得られる量子可積分系である。q 変形したボゾンモデルは強相関のあるボゾン系であり、量子逆散乱法によって解ける模型として知られている。量子逆散乱法で解けるモデルでは、スカラー積と呼ばれる Bethe ベクトルの内積に相当する量が基本的な物理量である。近年、Bogoliubov (2005) によって可解位相モデルのスカラー積の特殊な場合が、規格化定数を除いて箱に入った3次元 Young 図 の母関数という組み合わせ的量に一致するという結果が得られている。

周期的境界条件をもつ反強磁性 XXZ スピン模型 $\mathcal{H}_{XXZ} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{L} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z$ の異方性パラメータ $\Delta = -1/2$ における基底状態の波動関数が、交代符号行列の総数や3次元 Young 図の数え上げ等の組み合わせ論的な数によって特徴付けられることが Razumov と Stroganov (2001) により予想 (RS 予想) された。このようなスピン模型に組み合わせ論的な数が現われるという不思議な現象は、Bethe 方程式の解の性質や相関関数の計算にも大きな影響を与えている。

一方、 Temperley と Lieb (1971) は、平面格子上のパーコレーションを考察する際に $O(n)$ ループ模型と呼ばれる模型を導入した。近年の研究では、開放端をもつループ模型は、ある種の共形場理論 (Logarithmic CFT) で記述される物理系であることも分かってきている。

$O(n)$ ループ模型の $n = 1$ の場合のハミルトニアンは、XXZ スピン模型の $\Delta = -1/2$ の場合と等価である。前述した RS 予想は $O(n = 1)$ ループ模型において盛んに研究が行われている。一連の研究の中で、量子群 $U_q(sl_2)$ に対する量子 Knizník-Zamoldchikov (qKZ) 方程式や、Temperley-Lieb 代数の多項式表現がその数理構造を決めていることが

分かってきた。

XXZ スピン模型の $\Delta = -1/2$ という特殊な点は、数学的には量子群のパラメータ q が一の冪根となっており、一般には解析が困難である。また、3 次元 Young 図の数え上げは、位相モデルや RS 予想のみならず、シュアー過程などの確率過程モデル、位相的弦理論の振幅などにも現われることが分かっている。位相モデルや RS 予想の背後にある数理的構造の研究を行うことによって、幅広い物理の分野に新たな知見を得ることができると期待される。

可解位相モデルと歪３Ｄヤング図

本論文では、可解位相モデルにおいて更にスカラー積を一般化することによって、Bogoliubov の結果を拡張し、箱に入った歪 3 次元 Young 図の母関数を二通りの方法で得た。一つ目の方法は、ベーテベクトルを skew Schur 関数で書き表し、一般化されたスカラー積を歪 Schur 関数の足し上げとするものである。二つ目は、量子逆散乱法で基本的なモノドロミー演算子の交換関係を使って一般化スカラー積の行列式表示を導く方法である。これらの二通りの方法による副産物として、一見異なる二つの一般化されたスカラー積の表式を導出し、また Kuperberg (1996) による行列式の計算の拡張も得た。これらの結果は、Okounkov, Reshetikhin (2007) によって調べられた Schur 過程の有限サイズ版になっており、確率過程的な解釈、相関関数の明示的な計算などが有限サイズでも可能であることを示唆している。

XXZ 可解模型の構造 $U_q(sl_2)$ の高階の代数への拡張

一次元スピン系の励起状態の厳密な解析や相関関数の計算、また上記のような特殊な点 ($\Delta = -1/2$ の場合) で物理的にはどのようなことが起きるのかを理解することを研究の動機としている。

A 型の可解頂点模型や A 型のアフィン Hecke 代数 (量子群 $U_q(sl_k)$ に付随する代数) を用いることによって、上記に書いた RS 予想などを統一的に理解するため、高階の代数での正しい具体的な表現の導入を行い、この予想を研究するための基礎付けを初めて行ったことが最大の特徴である。とくに、XXZ スピン鎖にはよく知られるように周期的 (periodic) な場合だけでなく、一般の捻り (twisted) 境界条件がある。本研究では、量子群 $U_q(sl_k)$ に付随する捻り境界条件をもつ模型を新たに定義し、以下に述べる詳細な研究を行った。

捻り境界条件を持つ模型を定義するために、A 型アフィン Hecke 代数に"cylindric relations" と呼ばれる新たな関係式を導入した。さらに、スピン表現と path 表現と二つの独立な表現の具体的な構成を与えた。後者の表現を構成するために、平行四辺形のタイリングを用いた代数の計算方法を新たに導入した。タイリングを用いる"絵"は、A 型以外のアフィン Hecke 代数の計算にも有効な非常に強力な手法である。

本研究の対象は A 型アフィン Hecke 代数であるが、このタイリングの手法により、周期及び捻り境界条件を統一的に扱えるようになった。

この捻り境界条件を持つ模型のパス表現の上での qKZ 方程式の解を求めた。よく知られているように、qKZ 方程式のレベル 1 の解は、周期的境界条件をもつ模型の相関関数と密接な関係がある。それに対し、この捻り境界条件を持つ場合には、レベル $1+1/k-k$ の qKZ 方程式の解が求まることを新たに示した。ここで得られたレベル $1+1/k-k$ の

qKZ 方程式の解は、 Kasatani, Takeyama によって qKZ 方程式の非対称 Macdonald 多項式を用いて独立に研究がされた一般的な数学的立場から考察された解 ($U_q(sl_k)$ の場合) の具体的な特解となっている。すなわち、我々の研究は高次の qKZ 方程式の表す具体的な物理的模型を与えたことになる。また特に $k=2$ の場合には Pasquier によって求められていた $U_q(sl_2)$ のレベル $-1/2$ の解も再現していることも確認できた。さらに、q が一の冪根 ($q=-\exp(\pi i/(k+1))$) のときにレベル $1+1/k-k$ の qKZ 方程式の解の総和則を求めた。

展望

高階の代数を用いた模型の研究を通じ、$U_q(sl_2)$ の場合には見えてこなかった組み合わせ論や表現論について新しい展開を進めた。さらに、これらによってこの種の問題に関してこれまで進められていた代数的な側面に加えて、代数幾何的な側面からの研究の展開が期待される。。

本研究によって始めて導入されたタイリングを用いた記述は、1971 年に Temperley と Lieb によって導入された"絵" による代数の計算を、高階の代数に対して構成するという 35 年来の問題を解決したことになる。これらの模型は、新たなパーコレーション模型としてみることが出来る。このタイリングを用いた記述は、周期・捻り境界だけでなく、さらに開いた境界条件を持つスピン系にも応用できる。本研究はまた、ベーテ方程式の解、相関関数の計算など数多くの物理量の計算が可能であることを示唆している。

これからの問題として、交代符号行列や 3 次元ヤング図 ($U_q(sl_2)$ に相当) の高階な場合に相当する組み合わせ論的対象が存在することの研究や、二重アフィンヘッケ代数の表現論やマクドナルド多項式に関する研究、ヘッケ代数の代数幾何を用いた組み合わせ論的表現論などがある。