

# 論文審査の結果の要旨

氏名 茂地圭一

この学位論文は、可解模型への組み合わせ論の応用である2つの研究結果をまとめたものである。そのうち最初の研究は、Phase 模型と呼ばれる可解模型と(skew plane) Schur 多項式との関連を論じたものであり、もう一つは Temperley-Lieb 代数に基づく  $O(1)$  loop 模型における  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  の構造を  $U_q(\mathfrak{sl}_n)$  への一般化するものである。

本論文は9章よりなっている。このうち第1章は導入やアウトライン、これまでの研究の歴史的な流れの説明などがなされており、第9章はまとめと今後の展望が書かれている。またレビューとして第2章では6頂点模型、Fully Packed Loop, XXZ 模型などといった可解模型の一般的な説明がなされており、第3章では組み合わせ論の基本的な事柄、分割、Schur 関数などの対称多項式の様々な性質、Plane partition という3次元的な Young 図、交代符号行列などといった本論の展開に必要な基本的な知識の解説がなされている。

以上の解説を経た後、第4章で本論文の第一の研究結果である Phase 模型と Schur 多項式の関係についての議論がなされている。Phase 模型とは自由ボソンとよく似た交換関係を持つ演算子により定義される可解模型であり、 $L$  演算子の積のトレースであるモノドロミー行列の成分の内積により相関関数が定義される模型である。茂地氏の指摘はボソン演算子に対して図形的な解釈(図4.1)を対応させると、相関関数の計算に対して図形を用いたアルゴリズムで計算することが可能であることを見だし、それが skew Schur 多項式の関係式と対応がつくことを確立したことである。これにより Phase 模型の相関関数のあからさまな形を skew Schur 多項式により表現することを可能となった。これによりこれまで Bogoliubov により得られていた Schur 多項式に関する結果を skew Schur 多項式に拡張できることができた。

次に第5章から第8章までが第二の研究結果である  $O(1)$  loop 模型の一般化の解説が行われている。ここで考察されているものは元々  $O(n)$  loop 模型として知られている模型の特殊な( $n=1$ )もので結合定数のある固定された値にした場合であり、そのとき組紐群などで特徴的に現れる Temperley-Lieb 代数の演算子でハミルトニアンが記述できる。この状況でハミルトニアンの基底状態について Razumov-Stroganov(RS)予想、すなわちある特定の規格化を行うと波動関数の成分がすべて整数となり、しかもある組み合わせ論的な性質、すなわちその和が交代符号行列の数え上げと一致しているなどといった解釈を持っていること

が知られていた。茂地氏の研究の目標は、この模型を一般化することにより RS 予想であらわれる組み合わせ論的な性質が、一般化された模型でも成立することを示すことである。

まず第5章では  $O(1)$  loop 模型のレビューがなされており上で述べた RS 予想などの解説がなされている。次に第6章で Temperley-Lieb 代数の自然な一般化として Affine Hecke 代数が考察され、生成演算子間の関係として  $q$ -対称子を用いるというアイデアが提案されている。特に  $q$ -対称子に関連して Yang-Baxter 方程式の一般化や、その表現の性質が第6章後半から第7章にかけて展開されている。これらの性質を用いて第8章で茂地氏の主要な成果である  $A_k$  に一般化されたシリンダー上での模型が提案されている (第8.2節)。この模型はかなり複雑な模型であるがその真空に対応する解を調べてみると RS 予想でみられたような係数の整数性に近い性質がみられ、この意味で  $O(1)$  loop 模型を一般化した模型が構築されていることが理解できる。現在の段階では、現れた整数性がどのような組み合わせ論的な意味を持つかどうかについては明らかにされておらず、この意味では必ずしも完全な結果とはいえないが、今後の研究でこれらの問題点についても解決されることが期待できる。

以上のように、数学的に高度な問題に関して、粘り強い研究を行い、はっきりとした進展を得た点は高く評価すべきであり、本人が十分な研究能力を有していることは明らかである。またこの学位論文の元となった論文は一部分、内山優氏との共同研究に基づいているが、本人の貢献が十分大きいと判断できる。

したがって、博士 (理学) の学位を授与できると認める。